

Durée : 2 heures

Corrigé du baccalauréat ST2S Métropole 16 juin 2017

EXERCICE 1

(8 points)

La corpulence est mesurée à partir de l'indice de masse corporelle (IMC) qui est égal au rapport entre la masse (en kilogramme) et le carré de la taille (en mètre). Les individus dont l'IMC est supérieur à 30 sont considérés comme obèses.

On a réalisé en 2006 une étude à l'aide de questionnaires sur une population d'individus âgés de 21 à 59 ans.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

Dans cette partie, on choisit un questionnaire au hasard parmi ceux des femmes interrogées.

On note E l'évènement : « le questionnaire choisi correspond à une personne ayant un emploi ».

On note O l'évènement : « le questionnaire choisi correspond à une personne considérée comme obèse ».

Selon les données de 2006, on sait que :

- l'effectif total des femmes interrogées est de 2 685, dont 1 920 ont un emploi ;
- 10,6 % des femmes interrogées sont considérées comme obèses ;
- parmi les femmes considérées comme non obèses, 72,7 % ont un emploi.

1. On arrondira les résultats à l'entier le plus proche.

- a. Puisque 10,6 % des femmes interrogées sont considérées comme obèses, le nombre total de femmes considérées comme obèses est égal à $2\,685 \times 0,106 = 284,61$ soit, arrondi à l'unité, 285.

Le nombre de femmes considérées comme non obèses est alors de $2\,685 - 285 = 2\,400$.

Puisque parmi celles-ci 72,7 % ont un emploi le nombre de femmes considérées comme non obèses et ayant un emploi est égal à $2\,400 \times 0,727 = 1\,744,8$ soit, arrondi à l'unité, 1 745.

- b. Nous avons complété le tableau donné en ANNEXE 1, à rendre avec la copie.

2. L'univers est l'ensemble des 2 685 questionnaires.

Le tirage ayant lieu au hasard, la loi de probabilité mise sur cet univers est la loi équiprobable.

Par conséquent A étant un évènement de cet univers, $p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de l'univers}}$

- a. Calculons la probabilité de l'évènement E . $p(E) = \frac{1\,920}{2\,685} \approx 0,715$

- b. Donnons la probabilité de l'évènement O . Par hypothèse, nous avons $p(O) = 0,106$.

- c. L'évènement $E \cap O$ est l'évènement : « le questionnaire choisi correspond à une femme considérée comme obèse et ayant un emploi ».

Calculons la probabilité de cet évènement. $p(E \cap O) = \frac{175}{2\,685} \approx 0,065$

- d. Deux évènements sont indépendants si $p(E \cap O) = p(E) \times p(O)$.

$$p(E \cap O) = 0,065 \quad p(E) \times p(O) = 0,715 \times 0,106 \approx 0,076.$$

Les évènements E et O ne sont pas indépendants.

3. Étude de l'influence de la corpulence sur le taux d'emploi des femmes en 2006 (les probabilités seront arrondies au millième).

- a. La probabilité que le questionnaire choisi corresponde à une femme ayant un emploi sachant qu'elle est considérée comme obèse est notée $p_O(E)$.

$$p_O(E) = \frac{p(E \cap O)}{p(O)} = \frac{0,065}{0,106} \approx 0,613.$$

- b. D'après l'énoncé la probabilité $P_{\overline{O}}(E) = 0,727$.

- c. En comparant les résultats précédents, nous pouvons dire que la corpulence influe sur le taux d'emploi des femmes en 2006 puisque les femmes obèses ont une probabilité moindre d'avoir un emploi.

Partie B

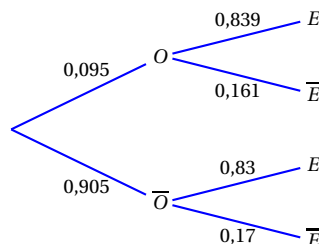
Dans cette partie, on choisit un questionnaire au hasard parmi ceux des hommes interrogés.

On reprend les mêmes notations pour les événements que dans la partie A, c'est-à-dire :

E désigne l'évènement : « le questionnaire choisi correspond à une personne ayant un emploi ».

O désigne l'évènement : « le questionnaire choisi correspond à une personne considérée comme obèse ».

On admet que les probabilités associées à cette expérience aléatoire sont représentées à l'aide de l'arbre de probabilité suivant :



- Par lecture de l'arbre, la probabilité qu'un homme ait un emploi sachant qu'il est considéré comme non obèse est 0,83. Nous lisons le nombre situé sur la branche reliant \bar{O} à E .
- Le rapport d'étude conclut qu'il n'y a pas d'influence de la corpulence sur le taux d'emploi des hommes en 2006. De même nous lisons que la probabilité qu'un homme ait un emploi sachant qu'il est considéré comme obèse est 0,839. Les probabilités étant proches, nous pouvons considérer qu'il n'y a pas d'influence de la corpulence sur le taux d'emploi des hommes en 2006.

EXERCICE 2

(7 points)

Une municipalité a ouvert au public, en novembre 2016, un parc composé d'un étang, d'un arboretum et d'une maison de la nature permettant d'accueillir des expositions de sensibilisation à la protection de l'environnement.

Pour des raisons de sécurité, la mairie devra affecter à ce parc un agent supplémentaire si le nombre de visiteurs dépasse 2 500 personnes par mois.

Partie A : ajustement affine

Afin d'anticiper le recrutement de l'agent supplémentaire, la municipalité a étudié la fréquentation du parc depuis son ouverture. Ces données sont regroupées dans le tableau suivant :

Mois	Novembre 2016	Décembre 2016	Janvier 2017	Février 2017	Mars 2017	Avril 2017	Mai 2017
Rang du mois (x_i)	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de visiteurs par mois (y_i)	1 200	1 233	1 316	1 360	1 448	1 457	1 520

Le nuage de points correspondant est donné en ANNEXE 2, à rendre avec la copie.

- Déterminons les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points et plaçons-le dans le repère de l'ANNEXE 2. Le point moyen est le point G de coordonnées $(\bar{x} ; \bar{y})$.

$$\bar{x}_G = \frac{0 + 1 + \dots + 6}{7} = 3 \quad \bar{y}_G = \frac{1200 + 1233 + \dots + 1457 + 1520}{7} = 1362$$

G (3 ; 1 362)

- On fait l'hypothèse que le nombre de visiteurs par mois de ce parc est correctement modélisé à l'aide de la droite d'ajustement D d'équation : $y = 54x + 1200$, x représentant le rang du mois depuis l'ouverture.

- a. La droite D est tracée dans le repère de l'ANNEXE 2. Pour la construction, nous pouvons utiliser les points de coordonnées $(0 ; 1200)$ et $(10 ; 1740)$.
- b. En supposant cet ajustement fiable jusqu'en 2020, déterminons la date (mois, année) à partir de laquelle la municipalité devra affecter un agent supplémentaire à ce parc. Pour ce faire résolvons $54x + 1200 > 2500$.

$$54x + 1200 > 2500 \quad 54x > 2500 - 1200 \quad 54x > 1300 \quad x > \frac{1300}{54} \quad x > 24,074.$$

Il faudrait 25 mois, ce qui donnerait décembre 2018, pour affecter un agent supplémentaire.

REMARQUE Nous aurions pu utiliser le graphique de l'annexe 2 pour lire la date pour laquelle l'ordonnée d'un point de la droite est supérieure à 2 500. Nous aurions lu approximativement 24 et nous aurions conclu à novembre 2018.

Par le calcul, nous constatons qu'en novembre 2018, selon ce modèle, le nombre de visiteurs est de 2 496.

Partie B : étude de l'impact d'une campagne de communication à l'aide d'une suite

La municipalité met en place une campagne de communication et prévoit que le nombre de visiteurs du parc augmentera de 5 % chaque mois à partir de mai 2017.

On modélise dans cette partie le nombre mensuel de visiteurs du parc à l'aide d'une suite (u_n) . Ainsi u_0 représente le nombre de visiteurs en mai 2017 ($u_0 = 1520$), u_1 représente le nombre de visiteurs en juin 2017, etc.

Afin d'étudier l'évolution de la fréquentation du parc, la municipalité utilise la feuille de calcul automatisé suivante :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Mois	Mai 2017	Juin 2017	Juillet 2017	Août 2017	Sept. 2017	Octobre 2017	Nov. 2017
2	Estimation du nombre de visiteurs par mois, u_n	1520						

1. Une formule que nous pouvons entrer dans la cellule C2 de sorte que, recopiée vers la droite sur la plage C2 : H2, elle permette d'afficher les estimations du nombre de visiteurs par mois est : $=B\$2 \times 1,05$.
2. *Utilisation de la suite (u_n)*
 - a. Déterminons une estimation du nombre de visiteurs en juin 2017. Calculons u_1 .
À une augmentation de 5 %, correspond un coefficient multiplicateur de $1 + \frac{5}{100}$ soit 1,05.
 $u_1 = 1520 \times 1,05 = 1596$.
 - b. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,05 et de premier terme $u_0 = 1520$.
 - c. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 q^n$.
Pour tout entier naturel n , $u_n = 1520 \times (1,05)^n$.
 - d. Déterminons une estimation du nombre de visiteurs dans ce parc en octobre 2017.
Nous avons alors $n = 5$, $u_5 = 1520 \times (1,05)^5 \approx 1939,948$ soit, arrondi à l'unité, 1 940.
3. Résolvons dans l'ensemble des nombres réels l'inéquation : $1520 \times 1,05^x \geq 2500$.

$$1520 \times 1,05^x \geq 2500$$

$$1,05^x \geq \frac{2500}{1520}$$

$$1,05^x \geq \frac{125}{76}$$

$$\log(1,05^x) \geq \log\left(\frac{125}{76}\right)$$

$$x \log 1,05 \geq \log\left(\frac{125}{76}\right)$$

$$x \geq \frac{\log\left(\frac{125}{76}\right)}{\log 1,05}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left[\frac{\log\left(\frac{125}{76}\right)}{\log 1,05}; +\infty \right[$ soit approximativement $[10,198; +\infty[$.

4. La mairie devra recruter un agent supplémentaire pour ce parc, suite à la campagne de communication, en avril 2018. La fréquentation à cette date est u_{11} soit environ 2 600 personnes.

EXERCICE 3

(5 points)

Partie A : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 8]$ par :

$$f(x) = 0,5x^3 - 12x^2 + 65,625x + 20.$$

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; 8]$

$$f'(x) = 0,5(3x^2) - 12(2x) + 65,625 = 1,5x^2 - 24x + 65,625.$$

2. On admet que : $f'(x) = (x - 3,5)(1,5x - 18,75)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 8]$. Complétons le tableau de signes suivant, afin d'étudier le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à $[0; 8]$.

$$\text{Sur } \mathbb{R}, x - 3,5 > 0 \iff x > 3,5$$

$$\text{Sur } \mathbb{R}, 1,5x - 18,75 > 0 \iff x > 12,5 \text{ par conséquent pour tout } x \in [0; 8], 1,5x - 18,75 < 0$$

x	0	3,5	8
$x - 3,5$		-	+
$1,5x - 18,75$		-	-
$f'(x) = (x - 3,5)(1,5x - 18,75)$		+	-

3. Construisons le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 8]$.

Étudions d'abord le sens de variation de la fonction f .

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I .

Sur $[0; 3,5[$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I .

Sur $]3,5; 8]$, $f'(x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.

Construisons le tableau de variation de f sur $[0; 8]$.

x	0	3,5	8
$f'(x)$	+	0	-
Variation de f	124,125		
	↗	↘	
	20		33

On fera apparaître les valeurs de la fonction f aux bornes de l'intervalle ainsi qu'aux éventuels changements de variation.

Partie B : Application

L'OMS a fixé à 50 milligrammes par litre (mg/L) la concentration limite de nitrates dans l'eau destinée à la consommation, considérant qu'au-delà il y a des risques pour la santé.

Suite à un incident industriel, une importante quantité de nitrates a été déversée dans un cours d'eau sur lequel se situe un point de captage pour l'alimentation d'une ville.

Un expert indépendant est alors consulté afin de prévoir l'évolution du taux de nitrates dans ce cours d'eau au niveau du point de captage pendant les 8 jours suivant l'incident.

L'expert décide de modéliser le taux de nitrates, x jours après le début de l'incident, à l'aide de la fonction f étudiée en **partie A**.

- D'après ce modèle, le taux maximal de nitrates atteint pendant la phase de surveillance de 8 jours est de 124,125 mg/L, maximum atteint par la fonction f pour $x = 3,5$.
- En cas d'incident, un décret impose de fermer le point de captage pendant 8 jours.
D'après le modèle choisi par l'expert, au terme des 8 jours après le début de l'incident, la concentration des nitrates est dans les conditions fixées par l'OMS puisqu'il y aura alors une concentration de 33 mg/L. Ceci est inférieur à 50 mg/L.

ANNEXES à rendre avec la copie

ANNEXE 1 : Corpulence et taux d'emploi des femmes en 2006.

	Obèse	Non obèse	Total
Ayant un emploi	175	1 745	1 920
N'ayant pas un emploi	110	655	765
Total	285	2 400	2 685

ANNEXE 2

