∽ Corrigé du baccalauréat ST2S Nouvelle-Calédonie ∾
28 novembre 2017

EXERCICE 1 **6 points**

Un test de dépistage d'une maladie a été élaboré par une entreprise pharmaceutique. Pour étudier sa fiabilité, on soumet à ce test une population comportant des personnes malades et des personnes saines.
On sait que dans la population testée :

— la proportion de personnes malades est de 85 % ;

— parmi les personnes malades, 95 % ont un test positif;

— parmi les personnes saines, 75 % ont un test négatif.

On choisit au hasard une personne dans la population testée; on admet que chaque personne a la même probabilité d'être choisie.
On note :

— M l'évènement : « la personne est malade » ;

— T l'évènement : « le test est positif fg.

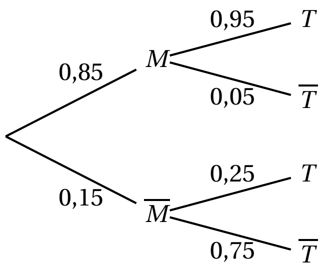
Dans cet exercice, la probabilité d'un évènement E est notée $p(E)$; la probabilité de l'évènement E sachant que l'évènement F est réalisé est notée $P_F(E)$; l'évènement contraire d'un évènement E est noté $\overline{E}$.

1. — $p(M) = 0{,}85$ car la proportion de personnes malades est de 85 %.

— $P_M(T) = 0{,}95$ car parmi les personnes malades, 95 % ont un test positif.

— $p_{\overline{M}}\left(\overline{T}\right) = 0{,}75$ car parmi les personnes saines, 75 % ont un test négatif.

2. Traduisons la situation par un arbre pondéré de probabilités.



3. **a.** $M \cap T$ est l'évènement : « la personne est malade et a un test positif ».

b. $p(M \cap T) = p(M) \times p_M(T) = 0{,}85 \times 0{,}95 = 0{,}8075$.

4. Montrons que $p(T) = 0{,}845$. M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers.

$p(T) = p(M \cap T) + p\left(\overline{M} \cap T\right) = p(M) \times p_M(T) + p\left(\overline{M}\right) \times p_{\overline{M}}(T)$.

$p(T) = 0{,}8075 + 0{,}15 \times 0{,}25 = 0{,}8075 + 0{,}0375 = 0{,}845$.

La probabilité d'avoir un test positif est 0,845.

5. On considère que le test de dépistage est fiable lorsque la probabilité qu'une personne soit malade sachant que son test est positif est supérieure ou égale à 0,95.

La probabilité qu'une personne soit malade sachant que son test est positif est notée $p_T(M)$.

$p_T(M) = \dfrac{p(M \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0{,}8075}{0{,}845} \approx 0{,}9556$.

Le test est, par conséquent, fiable.

EXERCICE 2 **6 points**

Le tableau ci-dessous, extrait d'une feuille de tableur, donne l'évolution de 2010 à 2016 du nombre de naissances dans une commune rurale.
La ligne 4 est au format pourcentage.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
2	Rang de l'année (x_i)	0	1	2	3	4	5	6
3	Nombre de naissances (y_i)	231	220	212	201	191	185	181
4	Taux d'évolution entre 2 années consécutives (en %)							

Il n'est pas demandé de compléter le tableau.

1. Calculons le taux d'évolution du nombre de naissances entre les années 2010 et 2011.
   Le taux d'évolution $\mathcal{T}$ est défini par $\dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$. $\mathcal{T} = \dfrac{220-231}{231} \approx -0{,}04762$.
   Le taux d'évolution des naissances entre 2010 et 2011 est, en pourcentage, arrondi à 0,01 % de $-4{,}76$ %.
2. Une formule que l'on peut saisir dans la cellule C4 pour calculer ce taux d'évolution et pour obtenir les autres taux d'évolution annuels en recopiant la formule vers la droite est : =(C\$3-B\$3)/B\$3.
3. Le nuage de points de coordonnées $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ est représenté dans le repère orthogonal fourni en annexe.
4. **a.** Les coordonnées de G sont $(\overline{x}\ ;\ \overline{y})$

   $$\overline{x}_G = \frac{0+1+2+3+4+5+6}{7} = 3 \qquad \overline{y}_G = \frac{231+220+212+201+191+185+181}{7} = 203$$

   G (3 ; 203).

   b. Le point G est placé sur le graphique dans le repère précédent.
5. On suppose que la droite (D) d'équation $y = -9x + 230$ réalise un ajustement affine du nuage de points. On suppose que cet ajustement est valable jusqu'en 2020.
   Montrons que le point G appartient à la droite (D)
   Le point G appartient à la droite (D) si ses coordonnées vérifient l'équation de la droite. Calculons l'ordonnée du point de la droite d'abscisse 3.
   $y = -9 \times 3 + 230 = 203$.
   Cette valeur étant celle de l'ordonnée de G, il en résulte que G appartient à (D).
   Traçons cette droite. Pour tracer cette droite, prenons 2 points (0; 230) et (5; 185)
6. Graphiquement une estimation du nombre de naissances en 2017.
   En 2017 le rang est 7. Lisons l'ordonnée du point de la droite d'abscisse 7. Avec la précision permise par le graphique, nous lisons environ 167.
7. Donnons une estimation de l'année au cours de laquelle le nombre de naissances passera sous le seuil des 160 naissances. Résolvons $-9x + 230 < 160$.
   $-9x + 230 < 160$; $-9x < 160 - 230$; $-9x < -70$; $x > \dfrac{70}{9}$; $x > 7{,}778$
   Nous estimons, d'après ce modèle, qu'en 2018 le nombre de naissances passera sous le seuil de 160 naissances.

EXERCICE 3 — 8 points

Un laboratoire pharmaceutique veut fabriquer un antibiotique contre les pneumonies bactériennes. Dans un premier temps, le laboratoire étudie l'évolution de la masse d'une colonie de bactéries. Dans un second temps le laboratoire teste l'efficacité de son antibiotique.

Partie A

Dans cette partie, le laboratoire étudie l'évolution de la masse d'une colonie de bactéries au cours du temps dans un milieu spécifique. On suppose que ce milieu est tel que la masse de la colonie augmente de 20 % par heure.
Au début de l'expérience, la masse de la colonie présente dans le milieu est égale à 10 mg.

Dans cette partie, on suppose que l'évolution de la masse de la colonie, exprimée en mg, est modélisée par une suite (u_n) où n représente le nombre d'heures écoulées depuis le début de l'expérience.

1. La masse de la colonie de bactéries au bout d'une heure d'expérience est u_1.
   Le coefficient multiplicateur associé à un taux d'évolution de 20 % est 1,2. $u_1 = 1{,}2 \times 10 = 12$.

2. Passant d'un terme au suivant en le multipliant par 1,2, la suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison 1,2.
3. **a.** Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 q^n$ soit $u_n = 10 \times (1,2)^n$.

   b. Calculons la masse de la colonie de bactéries au bout de la 15^e^ heure d'expérience.
   Calculons u_{15}, $u_{15} = 10 \times (1,2)^{15} \approx 154,0702$.
   La masse de la colonie de bactéries au bout de la 15^e^ heure, arrondie au milligramme, est de 154 mg.
4. Déterminons au bout de combien de temps la masse de la colonie de bactéries présente dans le milieu dépassera 500 mg. Pour ce faire, résolvons $u_n > 500$.
   $10\,(1,2)^n > 500$; $(1,2)^n > 50$; $n \log 1,2 > \log 50$; $n > \dfrac{\log 50}{\log 1,2}$; $n > 21,457$
   Au bout de la vingt-deuxième heure, la masse de la colonie de bactéries présente dépassera 500 mg.

Partie B

Le laboratoire teste l'effet de son antibiotique sur une colonie de bactéries pendant une période de 10 heures. Au début du test, la masse de la colonie est de 500 mg.
Dans cette partie, on modélise l'évolution de la masse de la colonie de bactéries par la fonction M définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par :

$$M(x) = x^3 - 9x^2 - 48x + 500$$

1. $M(0) = 0^3 - 9 \times 0^2 - 48 \times 0 + 500 = 500$ et $M(10) = 10^3 - 9 \times 10^2 - 48 \times 10 + 500 = 120$.
2. On note M' la fonction dérivée de la fonction M sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

   a. $M'(x) = 3x^2 - 9 \times (2x) - 48 = 3x^2 - 18x - 48$.

   b. Vérifions que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,10]$, $M'(x) = (3x+6)(x-8)$.
   Développons $(3x+6)(x-8)$.
   $(3x+6)(x-8) = 3x^2 - 24x + 6x - 48 = 3x^2 - 18x - 48 = M'(x)$
3. **a.** Dressons le tableau de signe de $M'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
   Sur $\mathbb{R}$, $3x+6 > 0 \iff x > -2$; $x - 8 > 0 \iff x > 8$

x	0		8		10
signe de $3x+6$		+		+	
signe de $x-8$		−	0	+	
signe de $M'(x)$		−	0	+	

   b. Étudions d'abord la variation de M.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.
   Sur $[0\,;\,8[$, $M'(x) < 0$ par conséquent M est strictement décroissante sur cet intervalle.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I.
   Sur $]8\,;\,10]$, $M'(x) > 0$ par conséquent M est strictement croissante sur cet intervalle.
   Construisons le tableau de variation de M sur $[0\,;\,10]$.

x	0		8		10
$M'(x)$		−	0	+	
Variation de M	500	↘		↗	120
			52		

4. D'après le tableau de variation, la valeur du minimum de la fonction M sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ est 52 obtenu au bout de huit heures.
5. L'antibiotique est dit efficace s'il parvient, au cours du test, à diviser par cinq la masse initiale de la colonie. L'antibiotique est efficace puisque la masse initiale de la colonie a été divisée par plus de neuf, presque dix.

ANNEXE
À rendre avec la copie
EXERCICE 2