∽ Corrigé S. T. A. E. Antilles–Guyane septembre 2007 ∾

Exercice 1 **5 points**

Dans cet exercice, les résultats numériques seront donnés sous forme décimale et arrondis à 10^{-4} *près.*

Un organisme a étudié le volume X, exprimé en litres, de carburant consommé par un véhicule sur un trajet fixé. On admet que X est une variable aléatoire de loi normale de moyenne 48 et d'écart-type 3,8.

Pour répondre aux questions suivantes, on pourra utiliser la table de la toi normale centrée réduite.

Dire que la loi de probabilité de la variable X est la loi normale $\mathcal{N}(48\ ;\ 3{,}8)$ est équivalent à dire que la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-48}{3{,}8}$ est la loi normale centrée réduite.

1. Calculons la probabilité que le volume de carburant consommé au cours de ce trajet soit :

– **inférieur à 42,3 litres.** Cette probabilité est notée $p(X \leqslant 42{,}3)$. Ceci est équivalent à $p(Z \leqslant -1{,}5)$.
$p(Z \leqslant -1{,}5) = 1 - p(Z \leqslant 1{,}5)$.
Dans la table de la loi centrée réduite, nous pouvons lire $p(Z \leqslant 1{,}5) = 0{,}9332$.
Il en résulte $p(Z \leqslant -1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$.
La probabilité que le volume de carburant consommé au cours de ce trajet soit inférieur à 42,3 ℓ est 0,0668.

– **compris entre 40,59 litres et 55,41 litres.** Cette probabilité est notée $p(40{,}59 \leqslant X \leqslant 55{,}41)$.
Elle est équivalente à $p(-1{,}95 \leqslant Z \leqslant 1{,}95)$.
$p(-1{,}95 \leqslant Z \leqslant 1{,}95) = p(Z \leqslant 1{,}95) - (1 - p(Z \leqslant 1{,}95)) = 2(p(Z \leqslant 1{,}95)) - 1 = 2 \times 0{,}9744 - 1 = 0{,}9488$.
La probabilité que le volume de carburant consommé soit compris entre 40,59 ℓ et 55,41 ℓ est 0,9488.

2. Le véhicule effectuant ce trajet a un réservoir d'une capacité de 44,2 litres. Calculons la probabilité qu'un plein ne suffise pas pour effectuer ce trajet. Nous cherchons donc la probabilité que le volume de carburant utilisé lors du trajet soit supérieur à 44,2 ℓ. Elle se note $p(X \geqslant 44{,}2)$.
Elle est équivalente à $p(Z \geqslant -1)$. Or $p(Z \geqslant -1) = p(Z \leqslant 1) = 0{,}8413$.
La probabilité qu'un plein ne suffise pas pour effectuer ce trajet est 0,841 3.

Exercice 2 **5 points**

La courbe $(\mathscr{C}_g)$ donnée dans le document représente, dans un repère orthogonal, une fonction g définie et dérivable sur un intervalle $\mathrm{I} = \left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right]$.
La droite (T) est tangente à $(\mathscr{C}_g)$ au point d'abscisse 0.

1. *Par **lecture graphique**, répondre aux questions suivantes en expliquant par une phrase la démarche adoptée :*

a. $g(0) = 1$ en lisant l'ordonnée du point d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées.
$g'(0) = 2$ en lisant le coefficient directeur de la tangente en 0 à la courbe.

b. Dans I, résolvons l'équation : $g(x) = 0$. Nous lisons les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses. Avec la précision permise par le graphique, nous obtenons environ $-\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{7\pi}{6}$. L'ensemble des solutions de l'équation serait $\left\{-\dfrac{\pi}{6}\ ;\ \dfrac{7\pi}{6}\right\}$.

c. Dans I, résolvons l'inéquation : $g'(x) > 0$. Nous lisons l'intervalle sur lequel la fonction est strictement croissante c'est-à-dire sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.

2. On admet que la fonction g est définie sur I par : $g(x) = 2\sin x + 1$.
En utilisant le cercle trigonométrique, résolvons sur I l'équation : $2\sin x + 1 = 0$ ou $\sin x = -\dfrac{1}{2}$.
Nous constatons que $-\dfrac{1}{2} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ ou $-\dfrac{1}{2} = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right)$
L'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{-\dfrac{\pi}{6}\ ;\ \dfrac{7\pi}{6}\right\}$.
Nous retrouvons l'ensemble des solutions appartenant à I de $g(x) = 0$.

Exercice 3 **10 points**

On admet que, dans certaines conditions, l'évolution en fonction du temps t (exprimé en heures) du taux d'alcool dans le sang (exprimé en grammes par litre) est donné à l'instant t par la formule : $4t\text{e}^{-t}$.
Soit f la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(t) = 4t\text{e}^{-t}$$

et $\left(\mathscr{C}_f\right)$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

1. On admet que la limite de f en $+\infty$ est égale à zéro. Puisque la limite de f est 0 lorsque t tend vers $+\infty$, alors l'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de f.
2. Soit f' la fonction dérivée de f sur $[0~;~+\infty[$.
   a. $f'(t) = 4\text{e}^{-t} + 4t(-\text{e}^{-t}) = 4\text{e}^{-t}(1-t)$.
   Nous obtenons bien la réponse attendue c'est-à-dire $f'(t) = 4\text{e}^{-t}(1-t)$.
   b. Étudions le signe de $f'(t)$ pour tout t de $[0~;~+\infty[$.
   Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $4\text{e}^{-t} > 0$ par conséquent sur $[0~;~+\infty[$, le signe de $f'(t)$ est celui de $1-t$
   Sur $\mathbb{R}$, $1-t > 0 \iff t < 1$. Il en résulte que si $t \in [0~;~1[$ alors $f'(t) > 0$ et si $t \in]1~;~+\infty[$, $f'\,t) < 0$
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
   Sur $[0~;~1[$, $f'(t) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
   Sur $]1~;~+\infty[$, $f'(x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.
   Dressons le tableau de variation de f sur $[0~;~+\infty[$. Auparavant calculons $f(0)$ et $f(1)$.
   $f(0) = 4 \times 0 \times \text{e}^0 = 0$; $f(1) = 4 \times 1 \times \text{e}^{-1} = 4\text{e}^{-1}$

t	0		1		$+\infty$
f'		+	0	−	
Variation de f	0	$\nearrow$	4e^{-1}	$\searrow$	0

3. Montrons que l'équation $f(t) = 0,5$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[3~;~4]$.
   f est une fonction dérivable strictement décroissante sur $]1~;~+\infty[$ a fortiori sur $[3~;~4]$.
   $f(3) = 12\text{e}^{-3} \approx 0,597$, $f(4) = 16\text{e}^{-4} \approx 0,293$.
   $0,5 \in [f(4)~;~f(3)]$ par conséquent il existe un unique $\alpha \in [3~;~4]$ tel que $f(\alpha) = 0,5$.
   En utilisant la calculatrice, un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} est : $3,26 \leqslant \alpha \leqslant 3,27$.
4. **a.** Complétons le tableau de valeurs suivant :

t	0	0,5	1	2	3	4	5
$f(t)$	0	1,2	1,5	1,1	0,6	0,3	0,1

Les valeurs approchées sont arrondies à 10^{-1} près.

   b. La courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ représentative de f est tracée ci-après dans le repère orthogonal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
   c. D'après le tableau de variation, le taux d'alcool dans le sang est maximal au bout d'une heure.
   d. Chez un conducteur, le taux maximal autorisé est 0,5 g/l.
   À l'aide de la courbe, déterminons à quels instants le conducteur est en infraction.
   Le conducteur est en infraction lorsque son taux d'alcool est strictement supérieur à $0,5\,\text{g}/\ell$. Avec la précision permise par le graphique, le taux est à 0,5 pour $t \approx 0,15$ et pour $t = \alpha$.
   L'intervalle de temps où le conducteur est en infraction est $]0,15~;~\alpha[$.

Document de l'exercice 2