Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant Métropole–La Réunion 9 juin 2016

La calculatrice est autorisée.

L'annexe A est à rendre avec la copie

EXERCICE 1 — 7 points

Dans la population française, la répartition des quatre groupes sanguins A, B, AB et O est la suivante :

A : 45 %	B : 10 %	AB : 3 %	O : 42 %

(d'après Établissement Français du Sang)
Pour chaque groupe, le sang peut posséder ou non le facteur Rhésus. Si le sang possède ce facteur, on dit que la personne est de Rhésus positif (noté Rh^+), sinon on dit qu'elle est de Rhésus négatif (noté Rh^-).

Pour chaque groupe, dans la population française, la répartition des Rhésus est la suivante :

Groupe	A	B	AB	O
Rh^+	85 %	84 %	82 %	83 %
Rh^-	15 %	16 %	18 %	17 %

Par exemple, 15 % des personnes du groupe A sont de Rhésus négatif (Rh^-).

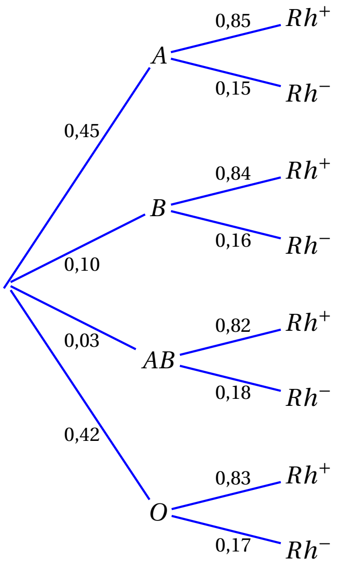
Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-2} près.

Partie A - Calculs de probabilités et loi binomiale

On interroge au hasard une personne de cette population.
On note :

O l'évènement : « la personne est du groupe O »
Rh^- l'événement : « la personne est de Rhésus négatif »

1. Une personne dont le sang est du groupe O et de Rhésus négatif est appelée **donneur universel**.
   a. À l'aide de l'énoncé, $P(O) = 0,42$ et $P_O(Rh^-) = 0,17$.
   b. La probabilité d'interroger un donneur universel est notée $p(O \cap Rh^-)$.
   $p(O \cap Rh^-) = p(O) \times p_O(Rh^-) = 0,42 \times 0,17 = 0,0714$.
   La probabilité d'interroger un donneur universel est à 10^{-2} près 0,07.
2. On s'intéresse maintenant à l'ensemble des groupes sanguins.
   a. Construisons un arbre de probabilités traduisant la situation décrite dans l'énoncé .



b. Calculons la probabilité d'interroger une personne de Rhésus négatif.
$p(Rh^-) = p(A \cap Rh^-) + p(B \cap Rh^-) + p(AB \cap Rh^-) + p(O \cap Rh^-)$
$p(Rh^-) = p(A) \times p_A(Rh^-) + p(B) \times p_B(Rh^-) + p(AB) \times p_{AB}(Rh^-) + p(O) \times p_O(Rh^-)$
$p(Rh^-) = 0{,}45 \times 0{,}15 + 0{,}10 \times 0{,}16 + 0{,}03 \times 0{,}18 + 0{,}42 \times 0{,}17 = 0{,}1603$
La probabilité d'interroger une personne de Rhésus négatif est à 10^{-2} près 0,16.

***On admet dans la suite de cette partie que la probabilité d'être un donneur universel est de* $0{,}07$.**

3. Lors d'une collecte de sang, 100 étudiants se présentent pour faire un don.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de donneurs universels parmi ces 100 étudiants. On admet que la loi de probabilité de X est une loi binômiale.

a. X suit une loi binômiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}07$.

b. Exprimons l'espérance mathématique de X notée $E(X)$. $E(X) = np = 100 \times 0{,}07 = 7$
Cette valeur dans le contexte de l'exercice signifie que sur 100 personnes, nous avons, en moyenne, 7 donneurs universels.

c. Calculons la probabilité d'avoir au moins 4 donneurs universels.
À la calculatrice, nous obtenons $p(X \geqslant 4) \approx 0{,}93$.

Partie B - Intervalle de fluctuation et prise de décision

En France, on admet que la proportion p de personnes de Rhésus négatif est $0{,}16$.

Une enquête statistique est menée pour déterminer si la proportion de personnes de Rhésus négatif dans une certaine région française est identique à celle de la France.

1. L'intervalle de fluctuation asymptotique à $0{,}95$ de la fréquence de personnes de Rhésus négatif obtenue sur un échantillon de taille 200.

On rappelle que l'intervalle de fluctuation asymptotique à $0{,}95$ *d'une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n est :*
$\left[p - 1{,}96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1{,}96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right]$
$n = 200 > 30$, $np = 200 \times 0{,}16 = 32 > 5$, $n(1-p) = 200 \times 0{,}84 = 168 > 5$
$I = \left[0{,}16 - 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}16 \times (0{,}84)}{200}}\ ;\ 0{,}16 + 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}16(0{,}84)}{200}}\right] = [0{,}11\ ;\ 0{,}21]$.

2. Sur un échantillon aléatoire (assimilable à un tirage avec remise) de 200 analyses de sang réalisées dans des laboratoires de la région étudiée, on a observé 48 personnes de Rhésus négatif.
Dans cet échantillon, la fréquence est $\dfrac{48}{200} = 0{,}24$.
Ce résultat nous amène à remettre en cause l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes de Rhésus négatif dans cette région est identique à celle de la France puisque la fréquence observée n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation.

EXERCICE 2 — 7 points

La présence de la bactérie *Aeromonas hydrophila* provoque chez les grenouilles adultes la maladie « des membres rouges », qui se traduit par des hémorragies et des ulcérations cutanées.
On admet que le nombre de bactéries présentes chez une grenouille atteinte par cette maladie, exprimé en milliers, peut être modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 7]$, par $f(t) = t + \mathrm{e}^{2t+1}$.
où t est le temps exprimé en heures. Les premiers symptômes apparaissent dès la présence de 8 millions de bactéries.

1. Calculons une valeur approchée à 10^{-3} près de $f(0)$ $f(0) = 0 + \mathrm{e}^{0+1} = \mathrm{e} \approx 2{,}718$
$f(0)$ est le nombre de bactéries en milliers présentes chez une grenouille au début du relevé.

2. Pour tout réel t de l'intervalle $[0\ ;\ 7]$, $f'(t) = 1 + 2\mathrm{e}^{2t+1}$.

3. Étudions d'abord le signe de $f'(t)$.
pour tout $t \in [0\ ;\ 7]$, $f'(t) > 0$ comme somme de réels strictement positifs.
Étudions maintenant le sens de variation de f sur $[0\ ;\ 7]$.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
Sur $[0\ ;\ 7[$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.
Construisons le tableau de variation de f sur $[0\ ;\ 7]$.

t	0		7
f'		+	
Variation de f	e	$\nearrow$	$7+\mathrm{e}^{15}$

4. On écrit l'algorithme suivant :

Initialisation
    t prend la valeur 0
    y prend la valeur 2,718
Traitement :
Tant que $y \leqslant 8000$
    t prend la valeur $t+1$
    y prend la valeur $t+\mathrm{e}^{2t+1}$
Fin Tant que
Sortie :
Afficher t

La valeur affichée à la sortie de l'algorithme est 4.

Cette valeur représente dans le contexte de l'exercice le temps nécessaire pour que le nombre de bactéries soit strictement supérieur à 8 millions ou le temps nécessaire pour que les premiers symptômes apparaissent.

5. La fonction f étant strictement croissante sur $[0\,;\,7]$ par conséquent le nombre de bactéries continuera de croître et ne redeviendra pas à une valeur inférieure à 8 millions entre quatre et sept heures. Il n'a pas été question de traitement.

6. On admet que le nombre moyen de bactéries présentes, exprimé en milliers, pendant les 7 premières heures est donné par :

$$\mathrm{N} = \frac{1}{7}\int_0^7 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. Déterminons une primitive de f sur $[0\,;\,7]$.
$F(t) = \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t+1}$.

b. $\mathrm{N} = \dfrac{1}{7}\displaystyle\int_0^7 f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{7}\left[\dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t+1}\right]_0^7 = \dfrac{49+\mathrm{e}^{15}}{14} - \dfrac{1}{14}\mathrm{e} = \dfrac{\mathrm{e}^{15}-\mathrm{e}+49}{14}$.

c. Une valeur approchée du nombre moyen de bactéries (arrondi à l'unité) présentes pendant les sept premières heures est 233 504 547.

EXERCICE 3 — 3 points

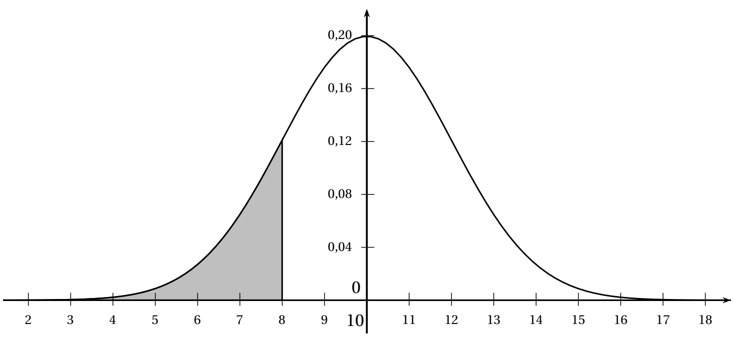
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples, donné en **ANNEXE A (à rendre avec la copie)**.
Pour chaque proposition, une seule réponse est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point, une réponse inexacte ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.

Cocher, pour chaque proposition, la réponse qui convient. Aucune justification n'est demandée.

EXERCICE 4 — 3 points

Suite à la réalisation d'une enquête menée auprès des élèves d'un lycée agricole, on estime que le temps d'utilisation, en heures par semaine, de leur téléphone portable est une variable aléatoire X distribuée suivant une loi normale dont la distribution est représentée ci-dessous.

On admet que la probabilité $P(X \leqslant 8)$, illustrée sur le graphique ci-dessous, est égale à 0,16 (arrondie à 10^{-2} près).



1. Déterminons en utilisant le graphique :

a. La probabilité qu'un élève utilise son téléphone portable moins de 12 heures par semaine.
La courbe étant symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$, nous avons donc $p(X \geqslant 12) = 0{,}16$. Par conséquent $P(X \leqslant 12) = 1 - p(X \geqslant 12) = 1 - 0{,}16 = 0{,}84$

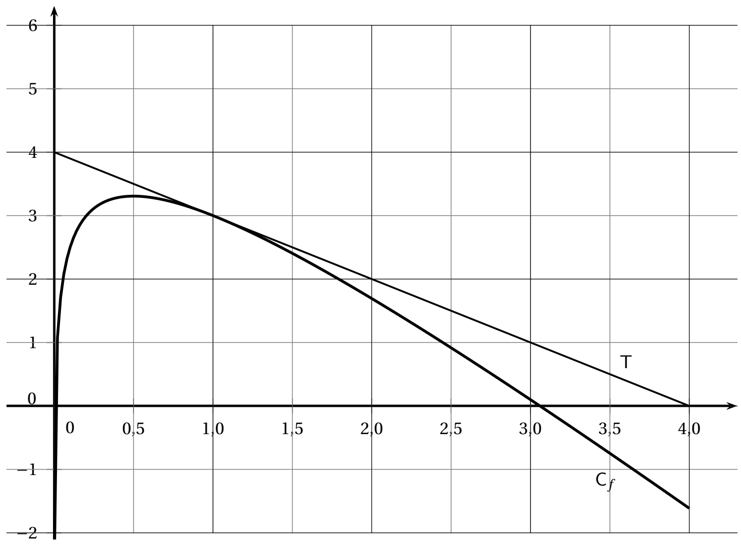
b. L'espérance de la variable aléatoire X.
$E(x) = \mu$ donc $E(X) = 10$, la courbe étant symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 10$

2. On admet que l'écart type σ a de cette variable aléatoire est égal à 2.
Des élèves de STAV ont conclu que 95 % des élèves du lycée utilisent leur portable entre 6 heures et 14 heures par semaine.
$p(6 \leqslant X \leqslant 14) = p(\mu - 2\sigma \leqslant x \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$
Cette conclusion semble pertinente.

ANNEXE A (à compléter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 3 : QCM

La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous est celle d'une fonction f définie et dérivable sur $]0;4]$.
On appelle $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.
L'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.



1. La limite de la fonction f en 0 est :

~~☐ impossible à déterminer~~ ~~☐ 0~~

☑ $-\infty$ ~~☐ $+\infty$~~

2. $f'(1)$ est égal à :

☑ -1 ~~☐ $-0{,}5$~~ ~~☐ 3~~ ~~☐ 4~~

3. On admet que la fonction f est définie sur $]0~;~4]$ par : $f(x) = -2x + \ln x + 5$.
Une primitive F de f sur $]0~;4]$ est définie par :

~~☐ $F(x) = -x^2 + \ln x + 5x$~~ ☑ $F(x) = -x^2 + x\ln x + 4x + 4$

~~☐ $F(x) = -x^2 + x\ln x$~~ ~~☐ $F(x) = -2 + \dfrac{1}{x}$~~