Corrigé Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant Métropole-Réunion septembre 2016

La calculatrice est autorisée.

L'annexe A est à rendre avec la copie

EXERCICE 1 **4 points**

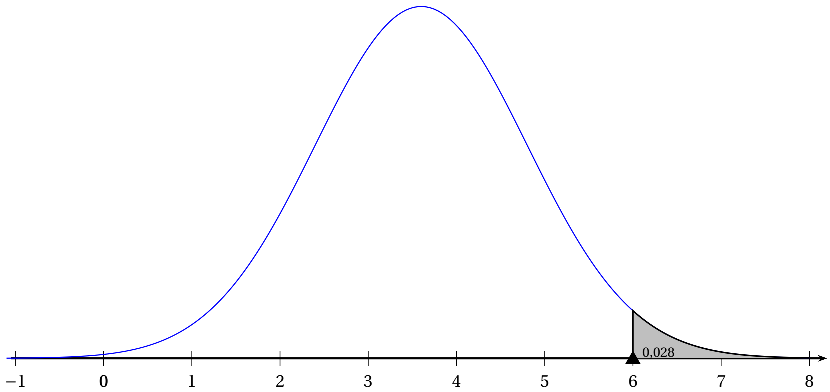
Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-4} près.

La capacité respiratoire, exprimée en L, d'un individu âgé de 20 ans est une variable aléatoire X distribuée selon la loi normale de moyenne $\mu = 3,6$ et d'écart-type $\sigma = 1,2$.
On dit que la capacité respiratoire d'un individu est :

- **Usuelle**, si elle est comprise entre 1,2 L et 6 L
- **Exceptionnelle**, si elle dépasse 6 L.

1. La courbe ci-dessous représente la courbe de GAUSS associée à la variable aléatoire X.

Le nombre 0,022 8, représentant l'aire grisée, est la probabilité que X soit supérieure à 6 c'est-à-dire que la capacité respiratoire de l'individu soit exceptionnelle.



2. Déterminons la valeur de $P(1,2 \leqslant X \leqslant 6)$.

À l'aide de la calculatrice, nous trouvons $P(1,2 \leqslant X \leqslant 6) \approx 0,954\,5$. Ce nombre correspond à la probabilité que la capacité respiratoire d'un individu soit usuelle.

3. On considère maintenant un échantillon de 500 sportifs de 20 ans. On a constaté que parmi ces sportifs, 37 avaient une capacité pulmonaire exceptionnelle soit une proportion de $\dfrac{37}{500}$ c'est-à-dire de 0,074.

On suppose que la population des sportifs de 20 ans est suffisamment grande pour que cet échantillon soit assimilé à un prélèvement avec remise.

On rappelle que, pour une fréquence f obtenue sur un échantillon de taille n, l'intervalle de confiance au niveau 0,95 de la proportion p inconnue d'une population est :

$$\left[f - 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\ ;\ f + 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$$

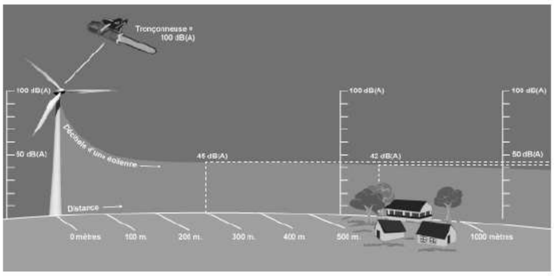
Déterminons un intervalle de confiance, au niveau de confiance 0,95, de la proportion p de sportifs de 20 ans ayant une capacité pulmonaire exceptionnelle.

$n > 30 \qquad np = 500 \times 0,074 = 37 > 5 \qquad n(1-p) = 500 \times 0,926 = 463 > 5$

$$\left[0,074 - 1,96\sqrt{\frac{0,074(1-0,074)}{500}}\ ;\ 0,074 + 1,96\sqrt{\frac{0,074(1-0,074)}{500}}\right] \approx [0,051\,0\ ;\ 0,096\,9]$$

EXERCICE 2 — 6 points

L'association suisse Queduvent publie ce graphique qui représente l'intensité du bruit, en décibels (noté dB), en fonction de l'éloignement, en mètres, de l'éolienne.



On peut lire également sur le site de cette association :

a) Information 1 : À 300 m l'intensité est de 45 dB .

b) Information 2 : L'intensité du bruit diminue de 3 dB à chaque fois que la distance double.

On considère, pour ce type d'éolienne, que l'intensité du bruit, en dB, en fonction de l'éloignement de l'éolienne, en mètres, est modélisée par la fonction définie sur [1 ; 1 200] par $f(x) = 100 - 4,328\ln(1101x)$.

Les résultats seront, si nécessaire, arrondis au dixième.

1. L'information 1 de l'association est correcte puisque $f(300) = 45,0$ au dixième près.

2. Une étude médicale a montré, qu'à partir d'une intensité sonore régulière de plus de 40 dB, on pouvait être sujet à des troubles du sommeil.

a. Résolvons par le calcul $f(x) \leqslant 40$ sur [1 ; 1200].

$$100 - 4,328\ln(1\,101x) \leqslant 40$$
$$4,328\ln(1\,101x) \geqslant 100 - 40$$
$$\ln(1\,101x) \geqslant \frac{60}{4,328}$$
$$e^{\ln(1\,101x)} \geqslant e^{\frac{60}{4,328}}$$
$$1\,101x \geqslant e^{\frac{60}{4,328}}$$
$$x \geqslant \frac{e^{\frac{60}{4,328}}}{1\,101}$$
$$\frac{e^{\frac{60}{4,328}}}{1\,101} \approx 952,645.$$

b. Pour ne pas être exposé à ce risque, il faut vivre à une distance de l'éolienne, arrondie au mètre, d'environ 953 m.

c. Le tableau de valeurs est complété sur l'**annexe A (à rendre avec la copie)**.

d. Calculons pour x non nul :
$f(x) - f(2x) = 4,328\ln(1101x) - 4,328\ln(1101 \times 2x) = 4,328[\ln(1101x) - \ln(1101 \times 2x)] =$
$4,328 \times \ln\left[\dfrac{1101x}{1101 \times 2x}\right] = 4,328\ln\dfrac{1}{2} = -4,328 \times \ln 2 \approx -2,99994.$
Cela représente effectivement au dix-millième près une baisse de 3 dB à chaque fois que la distance double. L'information 2 de l'association est correcte.

EXERCICE 3 — 6 points

En 2015, une entreprise de compostage a traité 4 200 tonnes de déchets verts. Cette entreprise souhaite connaître l'évolution dans les années à venir de la quantité de déchets à traiter.

Elle fait appel à un organisme pour mener cette étude. Ce dernier affirme que la quantité de déchets verts à traiter va augmenter de 11 % par an. On note d_n la quantité de déchets verts traitée l'année $2015 + n$.
Sur la capture d'écran (ci-contre) d'un tableur, $d_2 = 5\,174,82$ et le nombre 8 862 est, dans la troisième colonne, une valeur approchée de la somme des deux premiers termes de la suite (d_n), 14 036,82 la somme des trois premiers termes, etc.

n	d_n	$\sum d_n$
0	4 200	4 200
1	4 662	8 862
2	5 174,82	14 036,82
3	5 744,05	19 780,87
4	6 375,90	26 156,77

1. La quantité, arrondie à la tonne, de déchets verts qui sera traitée en 2018 est d_3 soit en lisant le tableau 5 744.

2. À un taux d'évolution de 11 % correspond un coefficient multiplicateur de $1+0{,}11$ c'est-à-dire de 1,11.
   La suite (d_n) est une suite géométrique de premier terme $d_0 = 4200$ et de raison 1,11, nombre par lequel nous multiplions un terme de la suite pour obtenir le terme suivant.

3. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 q^n$.

   $d_n = 4200 \times (1,11)^n$, pour tout entier n .

4. Déterminons la première année pour laquelle la quantité de déchets traités sera supérieure à 10 000 tonnes. Pour ce faire, résolvons $4200 \times (1{,}11)^n \geqslant 10000$.

$$(1{,}11)^n \geqslant \frac{10000}{4200}$$
$$(1{,}11)^n \geqslant \frac{50}{21}$$
$$\ln(1{,}11)^n \geqslant \ln\left(\frac{50}{21}\right)$$
$$n\ln(1{,}11) \geqslant \ln\left(\frac{50}{21}\right)$$
$$n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{50}{21}\right)}{\ln(1{,}11)}$$
$$\frac{\ln\left(\frac{50}{21}\right)}{\ln(1{,}11)} \approx 8{,}31$$

   La première année pour laquelle la quantité de déchets traités sera supérieure à 10 000 tonnes est 2015+9 soit 2024.

5. On donne l'algorithme suivant :

```
Variables :
    D, S réel
    i , N entier naturel
Initialisation :
    Affecter à D la valeur 4 200
    Affecter à S la valeur 4 200
    Saisir la valeur de N
Traitement :
    Pour i allant de 1 à N
      D prend la valeur D × 1,11
      S prend la valeur S + D
    Fin du Pour
Sortie :
    Afficher S
```

   Cet algorithme, pour N = 3, calcule la somme des quantités de déchets verts traités entre 2015 et 2018.

i	0	1	2	3	
D	4 200	4 200× 1,11	5 174,8	5 744,05	
S	4 200	4 200+4 662	14 036,82	19 780,87	

6. La valeur affichée par l'algorithme pour N = 3 est 19 780,87.

7. Déterminons la quantité totale de déchets traitée entre 2015 et 2024,arrondie à la tonne près.

   En faisant fonctionner l'algorithme donné, pour N=9 nous obtenons, à la tonne près, 70 232.

   remarque : en 2024, $n = 9$ nous aurions pu calculer la somme des termes de la suite géométrique c'est-à-dire $S_9 = 4200 \times \frac{1{,}11^{10}-1}{1{,}11-1}$

EXERCICE 4 — 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples, donné en **annexe A (à rendre avec la copie)**. Pour chaque proposition, une seule réponse est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point, une réponse inexacte ou l'absence de réponse n'enlève et n'ajoute pas de point.

Cocher, pour chaque proposition, la réponse qui convient. Aucune justification n'est demandée.

ANNEXE A (à compléter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 2 **Question 3**

Tableau de valeurs à 10^{-1} près

x	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000	1 200
$f(x)$	49,8	46,8	45,0	43,8	42,8	42,0	41,3	40,8	40,2	39,8	39

EXERCICE 4

1. La droite d'équation $x = 5$ est asymptote à la courbe représentative d'une fonction f définie sur $]5~;~+\infty[$. Cette fonction f est définie par :

☐ $\cancel{f(x) = \text{e}^{x} + 5}$ ☑ $f(x) = \text{e}^{-x} + 5$ ☐ $\cancel{\dfrac{\text{e}^{x}}{x-5}}$ ☐ $\cancel{f(x) = \dfrac{\text{e}^{x}}{x+5}}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\text{e}^{x}}{x}\right) =$

☐ $\cancel{-\infty}$ ☐ $\cancel{0}$ ☐ $\cancel{1}$ ☑ $+\infty$

3. Pour tout réel x, $\text{e}^{2x} =$

☐ $\cancel{\text{e}^{2} \times \text{e}^{x}}$ ☑ $(\text{e}^{x})^{2}$ ☐ $\cancel{2\text{e}^{x}}$ ☐ $\cancel{\text{e}^{2} + \text{e}^{x}}$

4. La valeur exacte de $\displaystyle\int_{0}^{1} \text{e}^{2x}\,\text{d}x$ est

☑ $\dfrac{\text{e}^{2}-1}{2}$ ☐ $\cancel{\dfrac{\text{e}^{2}}{2}}$ ☐ $\cancel{1-\dfrac{\text{e}^{2}}{2}}$ ☐ $\cancel{\text{e}^{2}-1}$