Corrigé du baccalauréat STAV
Métropole-La Réunion septembre 2018

EXERCICE 1 **6 points**

La masse en kg d'un lapin en fonction de l'âge x exprimé en semaines est donnée par la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = -4{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}06x} + 4{,}56$.
On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal, donnée en **annexe A**.

1. **a.** Un lapin est abattu le plus souvent à l'âge de 10 semaines.
   Sa masse est donc en kilogrammes : $f(10) \approx 2{,}1$.

   b. L'éleveur a une commande d'un lapin de 3,2 kg.
   D'après le graphique, le nombre de semaines sera autour de 20.
   Vérification : $f(20) \approx 3{,}2$.

2. **a.** On calcule la limite de f en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -0{,}06x = -\infty\\ \text{on pose } X = -0{,}06x\\ \displaystyle\lim_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0\end{array}\right\}\ \text{donc } \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}06x} = 0 \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 4{,}56$$

   b. On peut donc dire que le poids limite d'un lapin est de 4,56 kg.

3. On note f' la dérivée de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

   a. Pour tout réel x de $[0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = -4{,}5 \times (-0{,}06)\,\mathrm{e}^{-0{,}06x} + 0 = 0{,}27\,\mathrm{e}^{-0{,}06x}$.

   b. Pour tout réel X, on sait que $\mathrm{e}^{X} > 0$ donc $f'(x) > 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
   On en déduit que la fonction f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

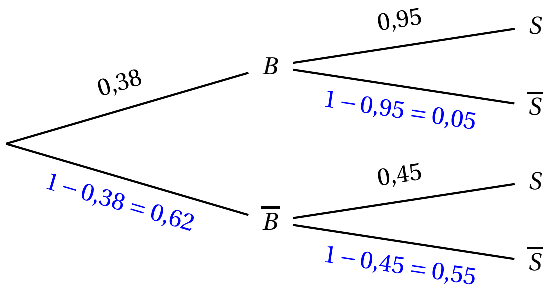
   c. En vieillissant, le lapin grossit donc la fonction f donnant la masse du lapin est croissante.

EXERCICE 2 **8 points**

Une entreprise spécialisée dans la fabrication de tartes aux pommes, indique sur l'emballage de ses produits, la mention « au moins 50 % de fruits bio ».
Une étude statistique a établi que :
38 % des fruits livrés à l'entreprise sont « bio ».
Parmi les fruits « bio », 95 % sont sélectionnés pour la fabrication des tartes.
Parmi les fruits « non bio », 45 % sont sélectionnés pour la fabrication des tartes.

Partie A
On prélève dans le stock de l'entreprise un fruit au hasard, on note :
B l'événement : « le fruit est bio ».
S l'événement : « le fruit est sélectionné pour la fabrication des tartes ».

1. On représente la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.



2. La probabilité que le fruit soit « bio » et sélectionné pour la fabrication des tartes est $P(B\cap S) = P(B)\times P_B(S) = 0{,}38\times 0{,}95 = 0{,}361$.
3. D'après la formule des probabilités totales :
$P(S) = P(B\cap S) + P\left(\overline{B}\cap S\right) = 0{,}361 + 0{,}62\times 0{,}45 = 0{,}64$.
4. **a.** La probabilité que le fruit choisi soit « bio » sachant qu'il est sélectionné pour la fabrication des tartes est $P_S(B) = \dfrac{P(B\cap S)}{P(S)} = \dfrac{0{,}361}{0{,}64} \approx 0{,}564$.

   b. Parmi les fruits sélectionnés, il y a une probabilité de 0,564 que le fruit soit bio, ce qui fait une proportion de 56,4 %, donc la probabilité est en accord avec la mention indiquée sur l'emballage des tartes « au moins 50 % de fruits bio ».

Partie B

On s'intéresse à la masse en grammes des tartes fabriquées. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tarte prélevée au hasard dans la chaîne de fabrication, associe sa masse exprimée en grammes. On admet que X est distribué suivant la loi normale de paramètres $\mu = 500$ et $\sigma = 4$.

1. Dans un premier temps, l'entreprise ne commercialise que les tartes dont la masse est comprise entre 496 et 504 grammes.

   a. On admet que $P(X \leqslant 496) = 0{,}159$. L'aire correspondant à cette probabilité est hachurée sur le graphique donné en annexe B.

   b. $P(496 \leqslant X \leqslant 504) = P(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma) \approx 0{,}683$.
   Le pourcentage de tartes conformes est donc de 68,3.
2. L'entreprise se rend compte qu'elle rejette trop de tartes. Elle décide d'assouplir ses règles de commercialisation et accepte à présent les tartes dont la masse est comprise entre 492 et 508 grammes.
La probabilité que la tarte soit commercialisée avec cette nouvelle règle est donc
$P(492 \leqslant X \leqslant 508) = P(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma) \approx 0{,}954$.

Partie C

Dans la chaîne de production fonctionnant normalement, 6 % des tartes ne sont pas commercialisées. Le responsable de la chaîne souhaite savoir s'il est nécessaire de procéder à un réglage de cette dernière. Pour cela, il prélève au hasard 230 tartes. La production est suffisamment importante pour que le choix des 230 tartes puisse être assimilé à un prélèvement avec remise.

1. On fait l'hypothèse que 6 % des tartes ne sont pas commercialisées, ce qui fait une proportion de $p = 0{,}06$. On va tester cette hypothèse sur un intervalle de taille $n = 230$ au moyen d'un intervalle de fluctuation asymptotique à 0,95.
C'est légitime car $n = 230 \geqslant 30$, $np = 13{,}8 \geqslant 5$ et $n\left(1-p\right) = 216{,}2 \geqslant 5$.
$$\begin{aligned} I_{230} &= \left[p - 1{,}96\sqrt{\dfrac{p\left(1-p\right)}{n}}\,;\, p + 1{,}96\sqrt{\dfrac{p\left(1-p\right)}{n}}\right] \\ &= \left[0{,}06 - 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}06\times 0{,}94}{230}}\,;\, 0{,}06 + 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}06\times 0{,}94}{230}}\right] \approx \left[0{,}029\,;\, 0{,}091\right] \end{aligned}$$
2. Sur l'échantillon de 230 tartes prélevées, 16 tartes ne sont pas commercialisées ce qui fait une fréquence dans l'échantillon de $f = \dfrac{16}{230} \approx 0{,}070$.
Cette fréquence dans l'échantillon appartient à l'intervalle I_{230} donc il n'y a pas lieu d'envisager un réglage de la machine, au risque de 5 % de se tromper.

EXERCICE 3 **3 points**

Dans un département, on a recensé les élèves de bac STAV (filles et garçons) suivant quatre options.

— Option AE (Aménagement et Environnement)
— Option T (Transformation)
— Option STE (Sciences et technologies des équipements)
— Option SMR (Services en milieu rural)

Le tableau ci-dessous donne la répartition des élèves en fonction de l'option choisie :

Sexe \ Option	AE	T	STE	SMR	Total
Fille	39	17	34	54	144
Garçon	42	28	45	10	125
Total	81	45	79	64	269

1. Dans le tableau, pour le profil STE, il y a 45 garçons pour 79 élèves, ce qui fait $\dfrac{45}{79} \approx 0{,}57$.
2. On complète le tableau donné en **annexe B**.
   Pour AE : $\dfrac{39}{81} \approx 0{,}48$ et $\dfrac{42}{81} \approx 0{,}52$. Pour SMR : $\dfrac{54}{64} \approx 0{,}84$ et $\dfrac{10}{64} \approx 0{,}16$.
3. Il y aurait indépendance entre l'option choisie et le sexe des élèves s'il y avait la même proportion de filles (ou de garçons) dans chaque option.
   Pour T il y a 38 % de filles et pour STE, il y en a 43 %. Donc il y a dépendance entre l'option choisie et le sexe des élèves.

EXERCICE 4 **3 points**

1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et pour tout n, $u_{n+1} = 0{,}9u_n$.
   Ci-dessous un même algorithme est programmé à l'aide de deux calculatrices différentes :

Calculatrice 1

```
PROGRAM : ALGO
:10 → U
:0 → N
:While U > 5
:0.9 * U → U
:N + 1 → N
:End
:Disp N
```

Calculatrice 2

```
=====ALGO
10 → U :0 → N↲
While U > 5 ↲
0.9U → U↲
N + 1 → N↲
WhileEnd↲
N
```

(N est la valeur affichée lorsque le programme a été exécuté.)

On lance le programme de la calculatrice une fois. N est alors affiché.

Affirmation 1 : Pour cette valeur de N, $u_N > 5$.

> Dans l'algorithme, la boucle tourne tant que $u_n > 5$ donc on sort dès que $u_n \leqslant 5$.
> **Affirmation 1 fausse.**

2. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction logarithme népérien dans un repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$
   Affirmation 2 : L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est : $y = x - 1$.

> La tangente au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
> $f(x) = \ln(x)$ donc $f(1) = \ln(1) = 0$, et $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ donc $f'(1) = 1$.
> L'équation est donc $y = 1(x-1) + 0$ soit $y = x - 1$.
> **Affirmation 2 vraie.**

3. Une urne contient 13 boules noires et 7 boules blanches. On procède à un tirage avec remise de 5 boules. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches extraites lors de ces 5 tirages.

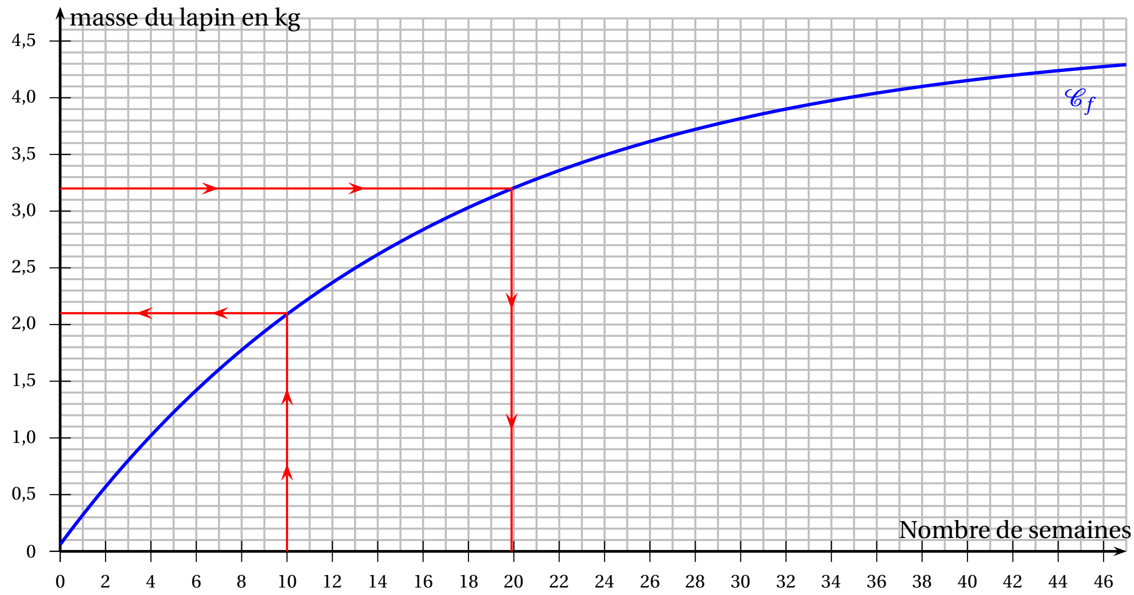
Affirmation 3 : $P(X=3) < P(X=4)$

> Sur 20 boules, il y en a 7 blanches, donc, lors d'un tirage d'une boule, la probabilité d'obtenir une boule blanche est $p = \dfrac{7}{20} = 0{,}35$.
> On procède à un tirage avec remise de 5 boules donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de boules blanches extraites lors de ces 5 tirages suit la loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0{,}35$.
> Pour k entier entre 0 et 5, $P(X=k) = \dbinom{5}{k} p^k \left(1-p\right)^{n-k}$ donc :
> $P(X=3) = \dbinom{5}{3} \times 0{,}35^3 \times 0{,}65^2 \approx 0{,}18$ et $P(X=4) = \dbinom{5}{4} \times 0{,}35^4 \times 0{,}65^1 \approx 0{,}05$
> **Affirmation 3 fausse.**

ANNEXE A (à compléter et à rendre avec la copie)

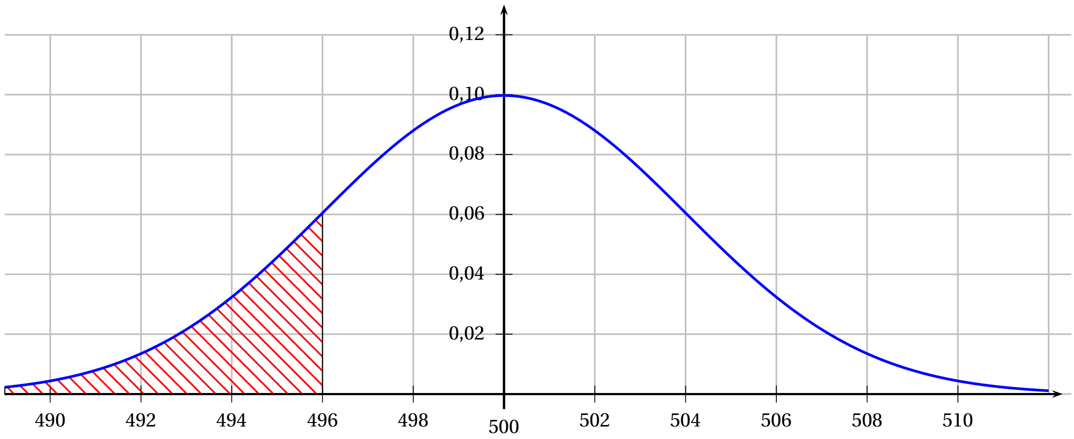
EXERCICE 1

Courbe représentative de la fonction f



ANNEXE B (à compléter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 2 :



EXERCICE 3 :

Option / Sexe	Profil colonne AE	Profil colonne T	Profil colonne STE	Profil colonne SMR	Profil colonne marginal
Fille	0,48	0,38	0,43	0,84	0,54
Garçon	0,52	0,62	0,57	0,16	0,46
Total	1	1	1	1	1