Corrigé du baccalauréat STAV
Nouvelle Calédonie novembre 2016

La calculatrice est autorisée.

Les annexes A, B et C sont à rendre avec la copie.

EXERCICE 1 **6 points**

PARTIE A

On considère la fonction f, définie sur $[1\ ;\ +\infty[$, par $f(x) = 1,05\text{e}^{0,165x}$

Le plan étant muni d'un repère orthogonal, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Calculons $f'(x)$ pour tout x de $[1\ ;\ +\infty[$.

$$f'(x) = 1,05 \times (0,165\text{e}^{0,165x}) = 0,017\,325\text{e}^{0,165x}$$

2. Déterminons le sens de variation de f sur $[1\ ;\ +\infty[$.
   Précisons d'abord le signe de $f'(x)$.
   Pour tout $x \in [1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) > 0$ comme produit de termes strictement positifs.
   Déterminons maintenant le sens de variation.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I.
   Pour tout $x \in [1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle .
3. Le tableau de valeurs est complété sur celui donné en **ANNEXE A (à rendre avec la copie)**.
4. La courbe $\mathscr{C}_f$ est tracée sur l'**ANNEXE A (à rendre avec la copie)**.

PARTIE B

Une étude a été réalisée afin de prévoir l'évolution du nombre d'utilisateurs de l'application SNAPCHAT.

1. Le document suivant donne le nombre d'utilisateurs, exprimé en millions, de cette application entre janvier 2012 et mai 2014 (source : www.htpratique.com). On a numéroté les mois à partir de janvier 2012, en prenant $x = 1$ pour le mois de janvier 2012, $x = 5$ pour le mois de mai 2012, etc

Années	2012			2013			2014
Dates	janvier	mai	septembre	janvier	mai	septembre	janvier
Numéro mois	1	5	9	13	17	21	25
Nombre d'utilisateurs en millions	1	2	5	10	20	35	67

   Le choix de la fonction f étudiée dans la **PARTIE A** peut, pour ces données, se justifier comme modèle de l'évolution du nombre d'utilisateurs de l'application SNAPCHAT chaque mois, exprimé en millions puisque la croissance n'est pas linéaire mais semble exponentielle .

   Dans cette question, toute trace d'argumentation pertinente sera valorisée et prise en compte dans l'évaluation.

2. Dans cette question, on admet que f a été choisie pour modéliser l'évolution du nombre d'utilisateurs de l'application SNAPCHAT exprimé en millions sur la période de janvier 2012 à janvier 2014.
   a. Résolvons graphiquement l'équation $f(x) = 106$. Pour ce faire, traçons la droite d'équation $y = 106$ et lisons l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec la courbe. Nous lisons 28 à l'unité près.
   b. Nous pouvons interpréter ce résultat comme une estimation du nombre de mois nécessaires pour que le nombre d'utilisateurs de l'application atteigne, exprimé en millions, 106.
   c. Résolvons par le calcul l'équation $f(x) = 106$

$$1,05\text{e}^{0,165x} = 106 \iff \text{e}^{0,165x} = \frac{106}{1,05} \iff 0,165x = \ln\left(\frac{106}{1,05}\right) \iff x = \frac{\ln\left(\frac{106}{1,05}\right)}{0,165}$$

   $x \approx 27,9676$. Ce résultat est cohérent avec la lecture graphique de la question précédente.

   d. SNAPCHAT a atteint 100 millions d'utilisateurs en juillet 2015. Le modèle, s'il était prolongé jusqu'en juillet 2015, ne semble pas adapté pour cette date puisque le nombre d'utilisateurs de l'application aurait dépassé 100 millions avant avril 2015.

EXERCICE 2 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples, donné en **ANNEXE B (à rendre avec la copie)**.
Pour chaque proposition, une seule réponse est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point, une réponse inexacte ou l'absence de réponse n'enlève et n'ajoute pas de point.
Pour chaque proposition, la réponse qui convient, a été cochée.

EXERCICE 3 **4 points**

On s'intéresse à l'évolution d'une bactérie.
On constate que le nombre de bactéries, dans certaines conditions, augmente chaque jour de 7 %.
On souhaite déterminer le nombre de jours nécessaires dans ces mêmes conditions, aux bactéries pour passer de 1 000 à plus de 2 000.

1. Justifions que, d'un jour à l'autre, le nombre de bactéries est multiplié par 1,07.
   À un taux d'évolution t correspond un coefficient multiplicateur $1+t$. Par conséquent à un taux de 7 % correspond un coefficient multiplicateur de $1+\frac{7}{100}$ c'est-à-dire 1,07.
2. L'algorithme qui répond à la problématique est complété sur l'**ANNEXE C (à rendre avec la copie)**.
3. En expliquant la méthode choisie, déterminons le nombre de jours nécessaires aux bactéries pour passer de 1 000 à plus de 2 000.
   En posant $u_0 = 1000$ et u_n le nombre de bactéries le jour $n+1$, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,07. Nous avons alors $u_n = 1000\times(1{,}07)^n$. Pour déterminer le nombre de jours résolvons $u_n \geqslant 2000$ c'est-à-dire $1000\times 1{,}07^n \geqslant 2000$ ou encore $1{,}07^n \geqslant 2$.
   En prenant le logarithme népérien des deux membres, nous obtenons $n\ln 1{,}07 \geqslant \ln 2$ d'où $n \geqslant \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}07}$.
   $\dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}07} \approx 10{,}24$. Il en résulte qu'à partir du onzième jour le nombre de bactéries aura dépassé 2000, résultat que nous pouvons retrouver en faisant fonctionner l'algorithme après l'avoir traduit pour une calculatrice.

EXERCICE 4 **6 points**

Les trois parties de l'exercice sont indépendantes.
Vous donnerez vos résultats à 10^{-4} près si nécessaire.
Une entreprise fabrique des biscuits conditionnés en sachets.

PARTIE A

Un contrôleur qualité affirme qu'un sachet sur vingt présente un défaut de fabrication. Une commande de 40 sachets doit être livrée à l'épicier du village. Le nombre d'emballages produits est suffisamment important pour considérer indépendants les choix des 40 sachets constituant la commande.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de sachets défectueux dans cette commande.

1. Justifions que X est distribuée selon une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   X est distribuée selon la loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = \frac{1}{20} = 0{,}05$ puisque il y a répétition de 40 tirages indépendants et identiques caractérisés par deux issues soit le sachet présente un défaut avec une probabilité $p = 0{,}05$ soit le sachet ne présente pas de défaut de probabilité $q = 1-p = 0{,}95$.
   Par conséquent, $p(X=k) = \binom{40}{k}(0{,}05)^k(0{,}95)^{40-k}$.
2. Calculons la probabilité qu'exactement 5 sachets soient défectueux dans cette commande.
   $p(X=5) = \binom{40}{5}(0{,}05)^k(0{,}95)^{35} \approx 0{,}0342$.

PARTIE B

Soit Y la variable aléatoire, qui à tout sachet prélevé au hasard dans la production associe sa masse exprimée en grammes.
On admet que Y est distribuée selon la loi normale de moyenne $\mu = 200$ et d'écart-type $\sigma = 5$.

1. La probabilité qu'un sachet pèse moins de 200 g notée $p(X \leqslant 200)$. À l'aide de la calculatrice, nous trouvons $p(X \leqslant 200) = 0{,}5$.
   remarque : *l'usage de la calculatrice était inutile car le résultat était évident puisque 200 est la moyenne de la série et $x = 200$ l'axe de symétrie de la courbe*
2. Un sachet est commercialisable si son poids est compris entre 190 g et 210 g. Déterminons le pourcentage de sachets commercialisables par cette entreprise. Pour ce faire, déterminons $p(190 \leqslant Y \leqslant 210)$. À l'aide de la calculatrice, nous trouvons 0,954 5. Il en résulte que 95,45 % des sachets sont commercialisables.
   Remarque sans la précision à 10^{-4}, puisque $p(190 \leqslant Y \leqslant 210) = p(\mu - 2\sigma \leqslant Y \leqslant \mu + 2\sigma)$, nous pouvions affirmer que 95 % des sachets étaient commercialisables.

PARTIE C

L'entreprise estime qu'elle produit 1,5 % de sachets présentant un défaut d'emballage ; nous allons donc tester cette hypothèse.
Une grande surface commande à cette entreprise un lot de 500 sachets. On suppose que la production est suffisamment importante pour que le choix des 500 sachets puisse être assimilé à un prélèvement avec remise.
On rappelle que :
Pour une proportion p connue dans une population, l'intervalle de fluctuation asymptotique au niveau de confiance de $0,95$ *d'une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n est :*

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ,\ p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

Nous avons fait l'hypothèse qu'une proportion de 0,015 de sachets présente un défaut d'emballage.
Déterminons un intervalle de fluctuation asymptotique au niveau de confiance de 0,95 de la fréquence de sachets présentant un défaut d'emballage pour un échantillon de taille 500.
$n = 500 > 30$; $np = 500 \times 0,015 = 7,5 > 5$ et $n(1-p) = 500 \times (1 - 0,015) = 492,5 > 5$
Les conditions sont vérifiées donc on détermine l'intervalle de fluctuation :

$$\left[0{,}015 - 1,96\sqrt{\frac{0{,}015(1-0{,}015)}{500}}\ ,\ 0{,}015 + 1,96\sqrt{\frac{0{,}015(1-0{,}015)}{500}}\right] \approx [0{,}0043\ ;\ 0{,}0257]$$

Le chef de rayon de la grande surface constate que parmi les 500 sachets livrés par cette entreprise, 2 % de ces sachets présentent un défaut d'emballage.
La fréquence constatée de 0,02 appartient à l'intervalle de fluctuation donc on peut considérer que l'hypothèse selon laquelle il y a 1,5 % de sachets défectueux ne peut pas être rejetée.

ANNEXE A (à compléter et à rendre avec la copie)

Exercice 1 : PARTIE A questions 3 et 4

Tableau de valeurs de la fonction f et représentation graphique

x	1	5	9	13	17	21	25	29
$f(x)$	1	2	5	9	17	34	65	126

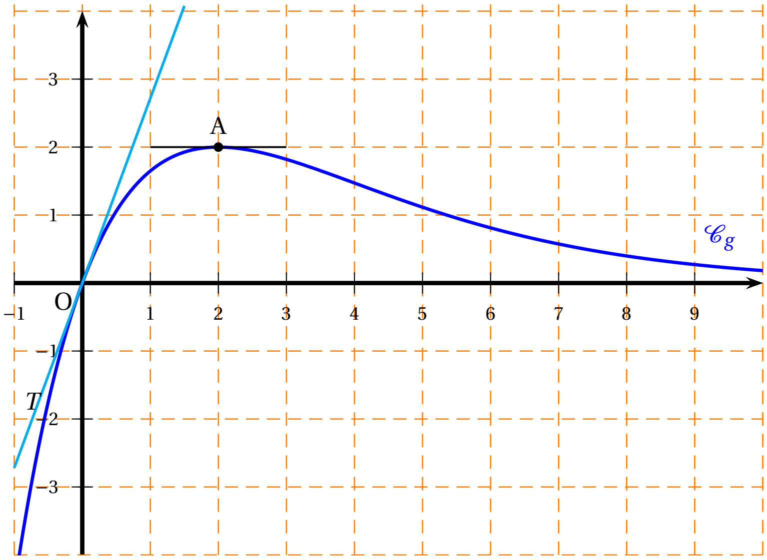
valeurs arrondies à l'unité

ANNEXE B (à compléter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 2

Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels.
Le plan étant muni d'un repère orthonormé, on note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative donnée ci-dessous.

- La tangente à $\mathscr{C}_g$ au point A est parallèle à l'axe des abscisses.
- T est la tangente à $\mathscr{C}_g$ à l'origine.
- L'axe des abscisses est asymptote à $\mathscr{C}_g$ en $+\infty$.



1. La limite de la fonction g en $+\infty$ est :

☐ $\cancel{-\infty}$ ☑ 0 ☐ $\cancel{2}$ ☐ $\cancel{+\infty}$

2. Une équation de la tangente T est :

☐ $\cancel{y = 2x}$ ☑ $y = \mathrm{e}x$ ☐ $\cancel{y = \mathrm{e}x + 2}$ ☐ $\cancel{y = 3x}$

3. L'équation $g'(x) = 0$ admet pour solution :

☐ $\cancel{0}$ ☐ $\cancel{1}$ ☑ 2 ☐ $\cancel{10}$

4. On note $I = \displaystyle\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x$. Alors I est compris entre :

☐ $\cancel{-4 \text{ et } -2}$ ☐ $\cancel{0 \text{ et } 2}$ ☑ 2 et 4 ☐ $\cancel{4 \text{ et } 8}$

EXERCICE 3

```
Variables
        N entier naturel
        U réel
Initialisation
        N prend la valeur 0
        U prend la valeur 1 000
Traitement
        Tant que U < 2 000
            N prend la valeur N+1
            U prend la valeur 1,07 U
        Fin du Tant que
Sortie
        Afficher N
```