Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant Antilles-Guyane-Polynésie septembre 2020 – Corrigé

EXERCICE 1 — 7 points

PARTIE 1

L'équipe « recherche et développement » d'une entreprise souhaite créer un nouveau modèle de paire de lunettes de réalité augmentée. On lance une fabrication test pour laquelle on estime que 5 % des paires de lunettes présentent un défaut. On prélève alors au hasard 12 paires de lunettes. On suppose que la fabrication est suffisamment importante pour considérer indépendant le choix des 12 lunettes. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de paires de lunettes défectueuses.

1. Pour chaque paire de lunettes, on n'a que deux choix possibles : elle est défectueuse avec une probabilité de $p = 0,05$, ou elle n'est pas défectueuse avec une probabilité de $1 - p = 0,95$.
   On prélève au hasard 12 paires de lunettes de façon indépendante.
   La variable aléatoire X qui donne le nombre de paires de lunettes défectueuses parmi les 12 suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = 0,05$.
2. La probabilité de n'avoir aucune paire de lunettes défectueuse est :
   $P(X = 0) = \binom{12}{0} \times 0,05^0 \times 0,95^{12} \approx 0,540.$
3. L'espérance de X est : $E(X) = np = 12 \times 0,05 = 0,6$.
   Il y a donc en moyenne, $0,6$ paire défectueuse sur un lot de 12.

PARTIE 2

Soit Y la variable aléatoire qui, à toute paire de lunettes de réalité augmentée, prélevée au hasard dans la production, associe son autonomie en minutes. On admet que Y est distribuée selon la loi normale de moyenne $\mu = 420$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

1. La probabilité qu'une paire de lunettes ait une autonomie de moins de 400 min est :
   $P(Y < 400) \approx 0,023$.
2. On dit qu'une paire de lunettes est suffisamment performante si son autonomie se situe entre 400 et 440 minutes.
   La probabilité qu'une paire de lunettes soit suffisamment performante est :
   $P(400 \leqslant Y \leqslant 440) \approx 0,954$.

PARTIE 3

Le service après-vente de l'entreprise constate que, sur l'ensemble de la production, 15 % des paires de lunettes sont retournées dans la première année.

1. La proportion de paires de lunettes retournées est $p = 0,15$; on peut donc établir l'intervalle de fluctuation asymptotique à 0,95 de la fréquence des paires de lunettes retournées dans la première année pour un échantillon de taille n :
   $$\begin{aligned} I_f &= \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] \\ &= \left[0,15 - 1,96\sqrt{\frac{0,15 \times 0,85}{n}}\ ;\ 0,15 + 1,96\sqrt{\frac{0,15 \times 0,85}{n}}\right] \\ &= \left[0,15 - 1,96\sqrt{\frac{0,1275}{n}}\ ;\ 0,15 + 1,96\sqrt{\frac{0,1275}{n}}\right]. \end{aligned}$$

2. Dans un des magasins, un revendeur remarque que, pour son magasin, sur 600 paires de lunettes vendues, il doit en retourner 100 au service après-vente au cours de la première année.

Pour $n = 600$, l'intervalle de fluctuation est donc :

$$I_f = \left[0,15 - 1,96\sqrt{\dfrac{0,1275}{600}}\ ;\ 0,15 + 1,96\sqrt{\dfrac{0,1275}{600}}\right] \approx [0,121\ ;\ 0,179].$$

La fréquence de retours est de $f = \dfrac{100}{600} \approx 0,167$.

$f \in I_f$ donc on peut estimer que ce magasin est représentatif du nombre de retours au service après-vente de l'entreprise.

EXERCICE 2 **5 points**

La production mensuelle d'une autre entreprise de lunettes varie entre 1 000 et 9 000 pièces.

La fonction f est définie sur $[1 ; 9]$ par : $f(x) = -x^2 + 14x - 13 - 12 \times \ln(x)$ où ln est la fonction logarithme népérien.

f représente le bénéfice mensuel en dizaine de milliers d'euros pour la vente de x milliers de lunettes.

1. Soit f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[1 ; 9]$.

$f'(x) = -2x + 14 - 12 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{-2x^2 + 14x - 12}{x}$

On développe : $-2(x-1)(x-6) = -2(x^2 - x - 6x + 6) = -2(x^2 - 7x + 6) = -2x^2 + 14x - 12$.

Donc $f'(x) = \dfrac{-2(x-1)(x-6)}{x}$.

2. On détermine le signe de $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $[1 ; 9]$:

x	1		6		9
-2		$-$		$-$	
$x-1$	0	$+$		$+$	
$x-6$		$-$	0	$+$	
x		$+$		$+$	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	

3. $f(1) = -1 + 14 - 13 - 0 = 0$; $f(6) = -36 + 84 - 13 - 12\ln(6) = 35 - 12\ln(6)$ et

$f(9) = -81 + 126 - 13 - 12\ln(9) = 32 - 12\ln(9)$

On en déduit le tableau de variations de f sur $[1 ; 9]$.

x	1		6		9
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$			$35 - 12\ln(6)$		
		↗		↘	
	0				$32 - 12\ln(9)$

4. Le nombre de pièces à vendre pour réaliser un bénéfice maximal est donc de 6 milliers.

La valeur de ce bénéfice est, en dizaines de milliers d'euros, de $f(6) = 35 - 12\ln(6) \approx 13,4989$ soit environ 134 989 euros.

EXERCICE 3 **4 points**

Dans une région montagneuse, le syndicat de la filière caprine a mis en place des actions pour promouvoir l'élevage de chèvres. Par conséquent, il a été observé une augmentation du cheptel de chèvres de 2 % par an. En 2017, le cheptel de chèvres dans cette région est évalué à 6 000 têtes. On suppose que cette évolution se poursuit dans les années qui suivent.

On note u_0 le nombre de chèvres en 2017, u_n le nombre de chèvres l'année $(2017n)$.

1. Le nombre de têtes en 2018 est : $6000+6000\times\dfrac{2}{100}=6120$.

   Le nombre de têtes en 2019 est : $6120+6120\times\dfrac{2}{100}\approx 6242$.
2. Ajouter 2 %, c'est multiplier par $1+\frac{2}{100}=1,02$; donc on passe du nombre de têtes l'année n au nombre de têtes l'année $n+1$ en multipliant par $1,02$.

   La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q=1,02$ et de premier terme $u_0=6000$.
3. On considère l'algorithme ci-dessous :

Variables :
N est du type nombre entier naturel
U est du type nombre réel
Initialisation :
N prend la valeur 0
U prend la valeur 6 000
Traitement :
Tant que U < 8 000
N prend la valeur N + 1
U prend la valeur U × 1,02
Fin tant que
Sortie :
Afficher 2017 + N

   a. Cet algorithme donne la première année pour laquelle le nombre de chèvres sera supérieur ou égal à 8 000.

   b. La suite (u_n) est géométrique de raison $q=1,02$ et de premier terme $u_0=6000$ donc, pour tout n, on a : $u_n=u_0\times 1,02^n$.

   On va chercher n pour que $u_n\geqslant 8000$.

   Par essais successifs : $u_{14}\approx 7917<8000$ et $u_{15}\approx 8075\geqslant 8000$.

   Donc la valeur affichée en fin d'algorithme est $2017+15$ soit 2032.

EXERCICE 4 **4 points**

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et soit f' sa fonction dérivée.

Sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-après.

La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses.

La droite T est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 3.

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet pour asymptote l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

À l'aide du graphique et en justifiant la démarche adoptée :

1. L'image de 3 par la fonction f est 2 (voir graphique).
2. La tangente T passe par le point B de coordonnées $(3\ ;\ 2)$, et par le point C de coordonnées $(5\ ;\ 0)$.

   Le coefficient directeur, $f'(3)$, de cette droite est égal à $\dfrac{0-2}{5-3}=-1$; donc $f'(3)=-1$.
3. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet pour asymptote l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$, donc la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à 0.

4. Les intervalles pour lesquels $f'(x) \leqslant 0$, sont les intervalles sur lesquels la fonction f est décroissante : c'est-à-dire l'intervalle $[2~;~+\infty[$.