Corrigé STAV Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant Antilles-Guyane juin 2015

La calculatrice est autorisée.

Les annexes A et B sont à rendre avec la copie

EXERCICE 1 **7 points**

1. On considère la fonction f définie sur $[0\,;240]$ par $f(x) = (x+15)\mathrm{e}^{-0,02x}$

a. Calculons la fonction dérivée de f.
$f = uv$ avec $u(x) = x+15 \quad v(x) = \mathrm{e}^{-0,02x}$. Il en résulte que $u'(x) = 1 \quad v'(x) = -0,02\mathrm{e}^{-0,02x}$.
$f' = u'v + v'u$ d'où

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^{-0,02x} + (x+15)(-0,02\mathrm{e}^{-0,02x}) \\ &= \mathrm{e}^{-0,02x}\,(1+(x+15)(-0,02)) \\ &= \mathrm{e}^{-0,02x}(1-0,02x-0,30) \\ f'(x) &= (0,7-0,02x)\mathrm{e}^{-0,02x}. \end{aligned}$$

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-0,02x} > 0$, par conséquent le signe de $f'(x)$ est celui de $(0,7-0,02x)$.

c. Étudions le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;240]$.
Sur $\mathbb{R}$, $\quad 0,7-0,02x > 0 \iff x < \dfrac{0,7}{0,02} \iff x < 35.$
Si $x \in [0\,;\,35[$, $f'(x) > 0$ et si $x \in]35\,;\,240]$, $f'(x) < 0$
Étudions ensuite le sens de variation de f.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
Sur $[0\,;\,35[$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
Sur $]35\,;\,240]$, $f'(x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.
Construisons enfin le tableau de variation de f sur $[0\,;240]$.

x	0		35		240
f'		+	0	−	
Variation de f	15	↗	$\approx 24,83$	↘	$\approx 2,1$

d. Le tableau de valeurs est complété sur l'**annexe A** (à rendre avec la copie).

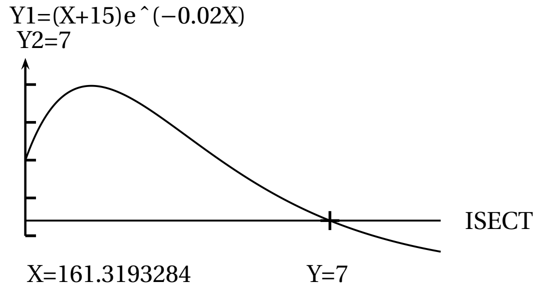
e. La représentation graphique de f est tracée sur l'**annexe A** (à rendre avec la copie).

La courbe de lactation représente la production laitière d'une vache, exprimée en kg par jour, en fonction du nombre x de jours après le vêlage (naissance du veau).
On se place dans le cas d'une race de vache pour laquelle on considère que cette courbe est la représentation graphique de la fonction f précédente, où $f(x)$ est la production laitière de la vache le jour x, exprimée en kg par jour.

2. Le pic de lactation est le point de la courbe de lactation traduisant le moment où la vache atteint la production laitière maximale. Les coordonnées du point où la courbe représentative de f admet un maximum sont, à l'unité près (35 , 25). Une interprétation de ces coordonnées dans le contexte de l'exercice est :

La production laitière est maximale 35 jours après le vêlage et s'élève à environ 25 kg.

3. Voici la capture d'écran d'une calculatrice
   Sur cette fenêtre on voit :
   - La courbe représentative de la fonction f
   - La droite d'équation $y = 7$
   - Le point d'intersection de cette courbe et de cette droite symbolisé par une croix, et dont on donne les coordonnées.



   Déterminons graphiquement, au bout de combien de jours la vache produit moins de 7 kg de lait par jour. Nous lisons, d'après le graphique, qu'elle produit 7 kg au bout de 161,31.

   Par conséquent à partir de 162 jours, la vache produira moins de 7 kg de lait par jour. La courbe représentative de f étant « en dessous » de la droite d'équation $y = 7$

EXERCICE 2 **5 points**

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes

Partie 1
Dans le cadre d'un programme d'échange Européen, un établissement scolaire a accueilli des étudiants de l'union Européenne venus d'Allemagne, d'Espagne, de Hongrie et de Roumanie. Le groupe d'étudiants se composait ainsi :

	Allemagne	Espagne	Hongrie	Roumanie	Total
Fille	62	36	11	35	144
Garçon	60	40	10	37	147
Total	122	76	21	72	291

1. Le profil colonne correspondant à l'Allemagne est complété dans le tableau situé en **annexe B (à rendre avec la copie)**, .
2. Dans cet échange européen, la proportion des filles ne dépend pas significativement du pays d'origine des étudiants. En Allemagne et en Hongrie, la proportion de filles est supérieure à 50 %, les effectifs sont peu nombreux et varient dans chaque pays sauf en Espagne d'une unité en plus ou en moins.

Partie 2

Parmi les étudiants accueillis, on a formé un groupe de 11 étudiants étrangers pour faire une équipe de football (qui peut être mixte ou non) pour jouer contre les étudiants français de l'établissement. On estime que la probabilité de choisir une fille est de 0,49 et que le nombre d'étudiants est suffisamment important pour considérer indépendants les choix des personnes constituant l'équipe.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de filles choisies dans l'équipe.

1. X est distribuée selon la loi binomiale de paramètres $n = 11$ et $p = 0,49$ puisque il y a répétition de 11 tirages indépendants et identiques caractérisés par deux issues soit le choix d'une fille de probabilité $p = 0,49$ soit le choix d'un garçon de probabilité $q = 1 - p = 0,51$.

   Par conséquent, $p(X = k) = \binom{11}{k}(0,49)^k(0,51)^{11-k}$.

   Les résultats suivants seront arrondis à 10^{-2} *près.*

2. Calculons $P(X = 2)$.

   $P(X = 2) = \begin{pmatrix}11\\2\end{pmatrix}(0,49)^2 \times (0,51)^9 \approx 0,03$.

   La probabilité que l'équipe de football formée par les étudiants étrangers comporte deux filles est de 0,03.

3. Pour que l'équipe contienne moins de filles que de garçons, elle doit comporter un nombre de filles compris entre 0 et 5 inclus. Par conséquent

$P(0 \leqslant X \leqslant 5) \approx 0{,}53$

EXERCICE 3 **4 points**

Questionnaire à choix multiples, QCM
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples, donné en **annexe B (à rendre avec la copie)**.
Pour chaque proposition, une seule réponse est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point, une réponse inexacte enlève 0,25 point et l'absence de réponse n'enlève et n'ajoute pas de point. Si le total des points est négatif, la note attribuée à cet exercice sera ramenée à zéro.
Cocher, pour chaque proposition, la réponse qui convient. Aucune justification n'est demandée.

EXERCICE 4 **4 points**

Les parties A et B sont indépendantes

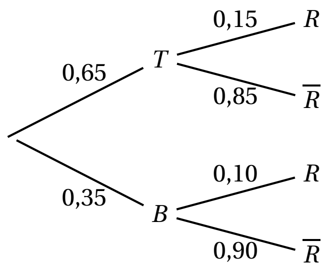
Partie A

Une étude effectuée en 2000 a permis de recenser la population des poissons d'un lac. Les résultats obtenus sont les suivants :

- 65 % des poissons sont des truites et parmi ces truites, 15 % sont porteuses de parasites.
- 35 % des poissons sont des brochets et parmi eux 10 % sont porteurs de parasites.

On pêche un poisson dans ce lac. On note :
T l'évènement « le poisson pêché est une truite »
B l'évènement « le poisson pêché est un brochet »
R l'évènement « le poisson pêché est porteur de parasites »

1. Décrivons cette situation avec un arbre de probabilités, en précisant sur chaque branche la valeur des probabilités.



2. La probabilité que le poisson pêché soit un brochet et qu'il soit porteur de parasites est notée $p(B \cap R)$.

$p(B \cap R) = p(B) \times p_B(R) = 0{,}35 \times 0{,}10 = 0{,}035$

3. Calculons $p(R)$.

$p(R) = p(T) \times p_T(R) + p(B) \times p_B(R) = 0{,}65 \times 0{,}15 + 0{,}035 = 0{,}0975 + 0{,}035 = 0{,}1325$.

Nous obtenons bien le résultat attendu.

Partie B

On rappelle que, pour une fréquence f obtenue sur un échantillon de taille n, l'intervalle de confiance au niveau 0,95 de la proportion p inconnue d'une population est :

$$\left[f - 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\ ;\ f + 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right]$$

En 2014, on décide d'effectuer un nouveau recensement des poissons parasités. On pêche un poisson, on effectue un relevé et on le relâche dans le lac. Parmi 900 poissons ainsi pêchés dans ce lac, on a observé 180 porteurs de parasites.

1. Parmi 900 poissons ainsi pêchés dans ce lac, on a observé 180 porteurs de parasites la proportion est alors $\dfrac{180}{900} = 0{,}2$. Déterminons l'intervalle de confiance au niveau 0,95 de la proportion de poissons parasités dans ce lac en 2014.

$n = 900 \quad np = 900 \times 0{,}2 = 180 \geqslant 5 \quad 900 \times (1 - 0{,}2) = 720 \geqslant 5$

$$I = \left[0,2 - 1,96\sqrt{\frac{0,2(1-0,2)}{900}}\ ;\ 0,2 + 1,96\sqrt{\frac{0,2(1-0,2)}{900}}\right] = [0{,}1739\ ; 0{,}2261]$$

(on donnera une valeur approchée à 10^{-4} près des bornes de l'intervalle).

2. On rappelle que la proportion de poissons parasités était de 0,1325 en 2000.

Nous pouvons dire qu'il y a eu une évolution de la proportion de parasites sur les poissons de ce lac entre 2000 et 2014. En 2014, la probabilité de tirer un poisson porteur de parasite est, au niveau de 0,95, très supérieure à celle observée en 2000.

ANNEXE A (à compléter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 1

1.d. Compléter le tableau de valeurs. On arrondira à l'entier le plus proche.

x	0	5	10	20	35	50	80	120	190	240
$f(x)$	15	18	20	23	25	24	19	12	5	2

1.e. Construire la représentation graphique de f.

ANNEXE B (à compléter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 2

Partie 1
3. Compléter dans le tableau, le profil colonne correspondant à l'Allemagne.
Les résultats seront arrondis à 10^{-2} près

	Allemagne	Espagne	Hongrie	Roumanie	Total
Fille	0,51	0,47	0,52	0,49	0,49
Garçon	0,49	0,53	0,48	0,51	0,51

EXERCICE 3 QCM

Cocher pour chaque proposition, la réponse qui convient. Aucune justification n'est demandée.

1. Soit u une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -1$ et de raison $r = 2$

Lequel de ces algorithmes permet de connaître u_{10} ?

☑ Affecter -1 à U Pour N allant de 1 à 10 Affecter U + 2 à U Fin Pour Afficher U	☐ Affecter -1 à U Pour N allant de 0 à 10 Affecter U + 2 à U Fin Pour Afficher U	☐ Affecter -1 à U Pour N allant de 1 à 10 Affecter 2U à U Fin Pour Afficher U

2. Soit $f(x) = x\text{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$

☐ f est croissante sur $\mathbb{R}$

☐ f est décroissante sur $\mathbb{R}$

☑ f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ -1]$ et croissante sur $[-1\ ;\ +\infty[$

3. On admet que la durée de fonctionnement correct d'un appareil donné, notée D, est une variable aléatoire distribuée suivant une loi normale, de moyenne 1 000 heures, et d'écart-type 300 heures.

La probabilité qu'un appareil fonctionne correctement entre 400 heures et 1 600 heures est égale, à 10^{-2} près, à :

☐ 0,68 ☑ 0,95 ☐ 0,99

4. La valeur exacte de $\displaystyle\int_0^1 \text{e}^{2x+4}\,\text{d}x$ est

☐ $\text{e}^6 - \text{e}^4$ ☑ $\dfrac{\text{e}^6 - \text{e}^4}{2}$ ☐ $\dfrac{\text{e}^6}{6} - \dfrac{\text{e}^4}{4}$