Corrigé du baccalauréat STAV
Antilles–Guyane – Polynésie 7 juin 2019

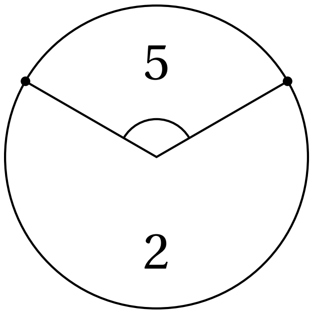
La calculatrice est autorisée.

Les annexes A, B et C sont à rendre avec la copie après avoir été numérotées

Les quatre exercices sont indépendants

EXERCICE 1 **7,5 points**

Le directeur du marketing d'un magasin envisage un jeu, dans lequel les clients peuvent obtenir un rabais sur le montant de leurs courses.
Le client fait tourner deux fois la roue de la chance. La roue de la chance a deux secteurs comme indiqué ci-dessous :



On effectue deux lancers indépendants de la roue de la chance qui est bien équilibrée. Le pourcentage de rabais est calculé comme le produit des deux nombres sur lesquels la roue de la chance s'est arrêtée.

PARTIE A

On note C l'évènement : « la roue de la chance s'est arrêtée sur 5 » ;
D l'évènement : « la roue de la chance s'est arrêtée sur 2 ».

1. Montrons que la probabilité que la roue s'arrête sur le nombre 5 est $\dfrac{1}{3}$. La probabilité d'obtenir 5 est proportionnelle au secteur angulaire. Ce secteur correspond au tiers du disque complet car $\dfrac{120}{360} = \dfrac{1}{3}$
2. Nous avons complété les probabilités sur chacune des branches de l'arbre de probabilités fourni en annexe A.
3. On note X la variable aléatoire qui à tout client associe le pourcentage de rabais obtenu.
   a. Indiquons les valeurs pouvant être prises par la variable aléatoire X.
   4 : les deux fois, la roue s'est arrêtée sur 2.
   10 : La roue s'est arrêtée une fois sur 5 et une fois sur 2, l'ordre n'intervenant pas.
   25 : les deux fois, la roue s'est arrêtée sur 5.
   b. Le tableau donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X est complété sur l'annexe A en effectuant le produit des probabilités sur chaque branche.
   c. Calculons $\mathbb{E}(X)$. $\mathbb{E}(x) = 4 \times \dfrac{4}{9} + 10 \times \dfrac{4}{9} + 25 \times \dfrac{1}{9} = 9$
   Dans le contexte de l'exercice, ce résultat est le pourcentage moyen de réduction. En moyenne, le client peut espérer une réduction de 9 %.

PARTIE B

On admet que la probabilité qu'un client obtienne un rabais de 25 % est de $\frac{1}{9}$.
On interroge au hasard 10 clients. On suppose que le nombre de clients est suffisamment important pour que le choix puisse être assimilé à un tirage successif avec remise.
On note N la variable aléatoire indiquant le nombre de clients ayant obtenu un rabais de 25 %.

1. Justifions que la loi de probabilité de N est la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{9}$.

N est distribuée selon la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{9}$ puisque il y a répétition de 10 tirages indépendants et identiques caractérisés par deux issues soit le client a reçu une réduction de 25 % avec une probabilité $p = \frac{1}{9}$ soit il n'a pas reçu une réduction de 25 % de probabilité $q = 1 - p = \frac{8}{9}$.

Par conséquent, $p(N = k) = \binom{10}{k}(1/9)^k(8/9)^{10-k}$.

2. Déterminons à 10^{-3} près, la probabilité qu'au moins un client parmi les 10 obtienne une remise de 25 %. Pour ce faire, calculons la probabilité de l'événement contraire : « aucun client n'a reçu une réduction de 25 % ».

$p(N = 0) = \binom{10}{0}(1/9)^0(8/9)^{10-0} \approx 0{,}308$. Il en résulte $p\left(\sum_{k=1}^{k=10} N = k\right) = 1 - 0{,}308 = 0{,}692$.

La probabilité qu'au moins un client parmi les 10 obtienne une remise de 25 % est 0,692.

PARTIE C

Le directeur du marketing considère que l'opération est un succès si elle attire 10 % de nouveaux clients.

1. Sous l'hypothèse que l'opération est un succès :

Déterminons l'intervalle de fluctuation asymptotique à 0,95 de la fréquence de nouveaux clients pour un échantillon de taille 200. Les bornes seront arrondies à 10^{-3} près.

On rappelle que l'intervalle de fluctuation asymptotique à 0,95 d'une fréquence pour les échantillons de taille n est :

$$\left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

Nous avons $n = 100$ et $p = 0{,}1$

Par conséquent, $n = 100 > 30$; $np = 100 \times 0{,}1 = 10 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 100 \times (1-0{,}1) = 100 \times 0{,}9 = 90 \geqslant 5$.

Les 3 conditions sont réalisées donc nous pouvons déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 %

Nous obtenons pour l'intervalle de fluctuation.

$$\left[0{,}1 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}1(1-0{,}1)}{100}}\ ;\ 0{,}1 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}1(1-0{,}1)}{100}}\right] = [0{,}0412\ ;\ 0{,}1588]$$

2. Le directeur du marketing organise une enquête.

Sur un échantillon de 200 clients, 16 sont venus pour la première fois dans le magasin.

La fréquence de nouveaux venus est $\frac{16}{200}$ soit $0,08$.

Par conséquent le directeur du marketing peut considérer que l'opération est un succès puisque cette proportion appartient à l'intervalle de fluctuation.

EXERCICE 2 **2 points**

Un élève est adepte d'une application de jeu sur son téléphone portable.
Aujourd'hui, il a un score de 10 000 points.
Quand il ne joue plus, un joueur perd 3 % des points du score du jour précédent. Par exemple, le premier jour, il perd 3 % de 10 000 points et n'a plus que 9 700 points. Le jour suivant, il perdra 3 % de 9 700 points et ainsi de suite.
Cet élève souhaite savoir son nombre de points restants s'il ne joue plus pendant tout un mois que l'on supposera être de 30 jours.

1. Nous avons complété l'algorithme fourni en annexe A afin de répondre à ce souhait.

2. À l'aide de la méthode de notre choix, calculons le nombre de points restant à l'élève s'il ne joue plus pendant 30 jours

Puisque chaque résultat se déduit du précédent en le multipliant par le même nombre 0,97, nous pouvons considérer la suite géométrique (u_n) de raison 0,97 et de premier terme $u_0 = 10000$.

Le terme général s'écrit alors $u_n = 10000 \times (0{,}97)^n$.

Sil ne joue plus pendant 30 jours, son nombre de points restants est u_{30} soit :

$10000 \times (0{,}97)^{30} \approx 4010$.

EXERCICE 3 **4 points**

La courbe $\mathcal{C}_f$, donnée dans l'annexe B, est la courbe représentative d'une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthonormé.
La droite T est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
On admet que les conventions graphiques usuelles sont respectées. En particulier, les variations de la fonction f en dehors du schéma de l'annexe B sont celles suggérées par le schéma.
Dans l'annexe B (à rendre avec la copie après avoir été numérotée), cocher, pour chaque question, l'unique réponse qui convient.
Aucune justification n'est demandée.

Une réponse inexacte ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.

EXERCICE 4 **6,5 points**

On a mesuré le taux de luminosité en fonction de la profondeur exprimée en mètres dans un plan d'eau.
On voudrait, dans un premier temps, évaluer à quelle profondeur le taux de luminosité en pourcentage devient inférieur à 10.
On choisit de modéliser le taux de luminosité, exprimé en pourcentage, à l'aide de la fonction g définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = 100\mathrm{e}^{-0{,}08x} \quad \text{où } x \text{ désigne la profondeur exprimée en mètres.}$$

Le plan est muni d'un repère orthogonal. On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans ce repère.

1. $g(0) = 100 \times \mathrm{e}^0 = 100$. Ce résultat dans le contexte de l'exercice signifie que le taux de luminosité à la surface de l'eau $(x = 0)$ est 100.

2. Pour tout x de $[0~;~+\infty[$, $g'(x) = 100 \times (-0{,}08\mathrm{e}^{-0{,}08}) = -8\mathrm{e}^{-0{,}08x}$.

Étudions son signe. Pour tout $x \in [0~;~+\infty[$, $\mathrm{e}^{-0{,}08x} > 0$.

Par conséquent $g'(x) < 0$, pour tout $x \in [0~;~+\infty[$.

3. Étudions maintenant le sens de variation de g sur $[0~;~+\infty[$.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Sur $[0~;~+\infty[$, $g'(x) < 0$ par conséquent g est strictement décroissante sur cet intervalle.

Dressons le tableau de variations :

x	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$	
Variations de f	100 ↘	0

4. Étudions la limite de g en $+\infty$.

$\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \mathrm{e}^{-X} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

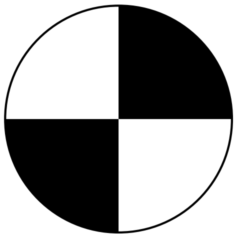
5. Nous avons complété le tableau de valeurs donné en annexe C (à rendre avec la copie après avoir été numérotée). (les résultats seront arrondis à l'unité).

6. La courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de g sur $[0~;~+\infty[$a été tracée sur l'annexe C (à rendre avec la copie après avoir été numérotée).

Unités graphiques : abscisses : 1 cm pour 5 unités, ordonnées : 1 cm pour 10 unités.

7. À l'aide de la courbe, à la problématique posée au début de l'exercice, c'est-à-dire savoir à quelle profondeur le taux de luminosité devient inférieur à 10 % nous pouvons répondre à partir d'une profondeur d'environ 29 m.

La zone photique du plan d'eau (zone exposée à une lumière suffisante pour que la photosynthèse se produise) correspond à une zone entre la surface et une profondeur où le taux de luminosité est supérieur à 1 %. Elle peut se mesurer approximativement à l'aide d'un disque de Secchi.



Disque de Secchi

Avec ce disque, on a trouvé une zone allant de la surface à une profondeur comprise entre 40 et 70 mètres et l'on souhaite une mesure plus précise de cette profondeur.

8. Résoudre, par le calcul, l'inéquation : $g(x) > 1$

$$\begin{aligned} 100\mathrm{e}^{-0,08x} &> 1 \\ \mathrm{e}^{-0,08x} &> 0,01 \\ \ln \mathrm{e}^{-0,08x} &> \ln 0,01 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -0,08x &> \ln 0,01 \\ x &< \frac{\ln 0,01}{-0,08} \end{aligned}$$

$\dfrac{\ln 0,01}{-0,08} \approx 57,56$

Par conséquent si $x \in [0~;~57]$ alors $g(x) > 1$

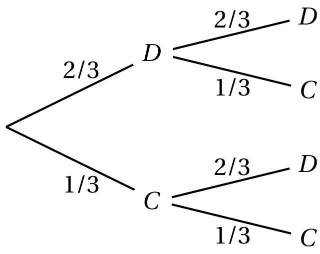
La zone photique du plan d'eau est la zone allant de la surface à une profondeur de 57 m.

ANNEXE A (à compléter, numéroter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 1

Partie A : Question 2 : probabilité sur chaque branche de l'arbre

1er tour de roue 2e tour de roue



Partie A Question 3. b. : Tableau à compléter

x_i	4	10	25
$p(X = x_i)$	4/9	4/9	1/9

EXERCICE 2 - Algorithme

Variable :
P est du type nombre réel

Initialisation :
P prend la valeur 10 000

Traitement :

Pour i allant de 1 à 30

P prend la valeur 0,97P.

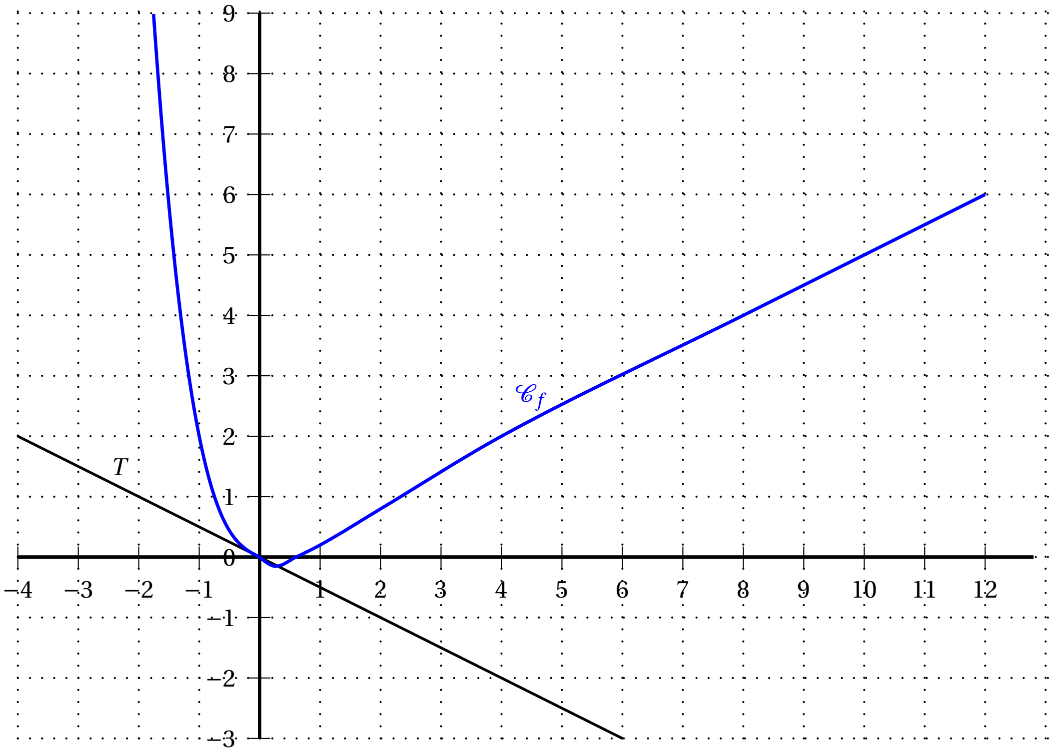
Fin Pour

Sortie :

Afficher P

ANNEXE B (à compléter, numéroter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 3 – QCM



1. L'image de 0 par f est :

☐ -1 ☐ $-\dfrac{1}{2}$ ☑ 0 ☐ 1

2. L'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$

☐ 0 solution ☐ 1 solution ☑ 2 solutions ☐ on ne peut pas savoir

3. Le nombre dérivé de f en 0 est :

☐ -1 ☑ $-\dfrac{1}{2}$ ☐ 0 ☐ 1

4. La fonction f est croissante sur un ensemble qui contient :

☐ $[-1\ ;\ 1]$ ☑ $[1\ ;\ +\infty[$ ☐ $\mathbb{R}$ ☐ $]-\infty\ ;\ 0]$

5. La seule limite possible, parmi les 4 propositions suivantes, de la fonction f en $+\infty$ est :

☐ $\dfrac{1}{2}x$ ☐ 0 ☐ 6 ☑ $+\infty$

ANNEXE C (à compléter, numéroter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 4

Question 6 - Tableau de valeurs

x	0	5	10	15	20	25	30	35
$g(x)$	100	67	45	30	20	14	9	6

Question 7 - Graphique