Corrigé du baccalauréat STAV Nouvelle Calédonie novembre 2018

La calculatrice est autorisée.

L'annexe A est à rendre avec la copie après avoir été numérotée.

EXERCICE 1 **5 points**

Sur un champ d'expérimentation, des techniciens étudient la croissance de plants de maïs semés en avril.
Ils effectuent des relevés de la hauteur de ces plants à partir du 1er mai.
Les hauteurs moyennes obtenues, au centième près, sont présentées dans le tableau ci-dessous :

Date	1er mai	1er juin	1er juillet	1er août	1er sept.
Hauteur (en mètres)	0,49		2,57	3,08	3,22

On admet que la modélisation de la hauteur moyenne, exprimée en mètres, d'un plant de maïs en fonction du temps, est donnée par la fonction h définie sur $[0\,;\,130]$ par :

$$h(t) = \dfrac{3,26}{1 + 5,7\text{e}^{-0,05t}}$$

où t est le temps exprimé en jours à partir du premier relevé, $t = 0$, le 1er mai.
On rappelle que les mois de juin et septembre comportent 30 jours, mai, juillet et août en comportent 31.

1. Déterminons, au centième près, la hauteur moyenne d'un plant de maïs le 1er juin.
   Le 1er juin, $t = 31$. Calculons alors $h(31)$: $h(31) = \dfrac{3,26}{1 + 5,7\text{e}^{-0,05\times 31}} \approx 1,48$.
2. En utilisant un logiciel de calcul formel, on obtient pour la dérivée, de h :
   $$h'(t) = \dfrac{0,929\,1\text{e}^{-0,05t}}{\left(1 + 5,7\text{e}^{-0,05t}\right)^2}.$$
   a. Pour tout $t \in [0\,;\,130]$, $h'(t) > 0$ comme quotient de réels strictement positifs. Par conséquent, la fonction h est croissante sur $[0\,;\,130]$.
   b. Bien sûr, nous pouvions nous attendre à ce résultat, au vu de ce que modélise la fonction h, puisque il s'agit de la croissance de plants de maïs.
3. Déterminons, par le calcul, le nombre minimal de jours nécessaires pour que la hauteur d'un plant de maïs soit supérieure à 2 mètres.
   Pour ce faire, résolvons $h(t) \geqslant 2$.
   $\dfrac{3,26}{1 + 5,7\text{e}^{-0,05t}} \geqslant 2 \iff 3,26 \geqslant 2\left(1 + 5,7\text{e}^{-0,05t}\right) \iff 1,26 \geqslant 11,4\text{e}^{-0,05t} \iff$
   $\text{e}^{-0,05t} \leqslant \dfrac{1,26}{11,4} \iff -0,05t \leqslant \ln\left(\dfrac{1,26}{11,4}\right) \iff 0,05t \geqslant -\ln\left(\dfrac{1,26}{11,4}\right) \iff t \geqslant \dfrac{-\ln\left(\dfrac{1,26}{11,4}\right)}{0,05}$
   Or $\dfrac{-\ln\left(\dfrac{1,26}{11,4}\right)}{0,05} \approx 44,05$, donc le nombre minimal de jours pour que le plant de maïs atteigne et dépasse les deux mètres est 45.

EXERCICE 2 **6 points**

Le blé tendre est la première céréale produite en France.
Lorsqu'il est d'assez bonne qualité pour être destiné à la fabrication du pain, il est dit « panifiable ».
En France, 58 % de la production de blé tendre est panifiable. Ses autres utilisations sont pour l'alimentation animale, mais aussi pour des productions industrielles (le papier, les cosmétiques, les produits pharmaceutiques, la production de bioéthanol). Un étudiant en stage s'intéresse aux remorques de blé tendre livrées dans une coopérative.

Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A

On admet que la proportion p de remorques remplies de blé panifiable attendues pour une coopérative est 0,58.
L'étudiant choisit au hasard 40 remorques remplies. On considère que ce choix peut être assimilé à un tirage avec remise. Il constate que parmi ces remorques, 19 contiennent du blé panifiable.
On rappelle que :
L'intervalle de fluctuation asymptotique à 0,95 *d'une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n est* :

$$\left[p-1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p+1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$

1. Déterminons l'intervalle de fluctuation asymptotique à 0,95 de la fréquence de remorques de blé panifiable sur un échantillon de taille 40 (les bornes seront arrondies à 10^{-2} près).
   $p = 0{,}58$ et $n = 40$ donc :

$$I = \left[0{,}58-1{,}96\sqrt{\frac{0{,}58(1-0{,}58)}{40}}\ ;\ 0{,}58+1{,}96\sqrt{\frac{0{,}58(1-0{,}58)}{40}}\right] \approx [0{,}43\ ;\ 0{,}73].$$

2. La fréquence observée est $f_{40} = \dfrac{19}{40} = 0{,}475$; $f_{40} \in I$ donc la proportion de 0,58 de remorques de blé panifiable de cette coopérative ne peut pas être remise en cause au vu de cet échantillon (au seuil de 95 %).

PARTIE B

On considère que chaque remorque a la probabilité 0,58 de contenir du blé panifiable.
L'étudiant choisit au hasard 40 remorques. On considère que ce choix peut être assimilé à un tirage avec remise de 40 remorques.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de remorques contenant du blé panifiable parmi les 40.

1. Justifions que X est distribuée suivant la loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0{,}58$.
   X est distribuée selon la loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0{,}58$ puisque il y a répétition de 40 tirages indépendants et identiques caractérisés par deux

issues soit le contenu de la remorque contient du blé panifiable avec une probabilité $p = 0,58$ soit le contenu de la remorque ne contient pas du blé panifiable de probabilité $q = 1 - p = 0,42$.

Par conséquent, $p(X = k) = \binom{40}{k}(0,58)^k(0,42)^{40-k}$.

2. Déterminons la probabilité (les résultats seront arrondis à 10^{-2} près) des évènements suivants :

   a. Exactement 19 remorques contiennent du blé panifiable. Calculons $p(X = 19)$.

   $p(X = 19) = \binom{40}{19}(0,58)^{19}(0,42)^{40-19} \approx 0,05$.

   b. Au plus 19 remorques contiennent du blé panifiable. Calculons $p(X \leqslant 19)$.

   $p(X \leqslant 19) = \sum_{k=0}^{k=19} p(X = k)$. À l'aide d'une calculatrice, nous trouvons $p(X \leqslant 19) \approx 0,12$.

3. **a.** Déterminons l'espérance de la variable aléatoire X. $\mathbb{E}(X) = np = 40 \times 0,58 = 23,2$.

   b. Quelle interprétation l'étudiant peut-il donner à cette espérance?

   L'étudiant peut considérer que c'est le nombre moyen de remorques contenant du pain panifiable qu'il pourra trouver dans une série de 40 remorques.

EXERCICE 3 — 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples, donné en **annexe A (à rendre avec la copie)**. *Pour chaque proposition, une seule réponse est exacte. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse inexacte ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.*
Cocher, pour chaque proposition, la réponse qui convient. Aucune justification n'est demandée.

EXERCICE 4 — 5 points

On estime qu'en Nouvelle-Calédonie, la production de fruits et légumes augmente de 5 % par an.
En 2014, la production était de 16 714 tonnes sur plus de 1 100 hectares.

1. Calculons la production, arrondie à la tonne, de fruits et légumes en 2015.

   À une augmentation de 5 % correspond un coefficient multiplicateur de 1,05.

   En 2015, la production sera alors $16714 \times 1,05 = 17550$ arrondie à la tonne.

2. Soit n un nombre entier naturel. On note u_n la production de fruits et légumes en Nouvelle-Calédonie pendant l'année $2014 + n$. Ainsi, $u_0 = 16714$.

   a. (u_n) est une suite géométrique de raison 1,05 puisque chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par le même nombre, le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 5 %.

   b. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est :

   $u_n = u_0 \times (q)^n$. $u_n = 16714 \times (1,05)^n$.

   c. Donnons une estimation, arrondie à la tonne, de la production en 2018. En 2018 ,$n = 4$ d'où $u_4 = 16714 \times (1,05)^4 \approx 20316$.

3. L'algorithme **en annexe A (à rendre avec la copie)** permet de déterminer l'année à partir de laquelle la production de fruits et légumes en Nouvelle-Calédonie aura doublé par rapport à 2014.

a. L'algorithme est complété sur l'**annexe A (à rendre avec la copie)** .

b. Déterminons, par la méthode de notre choix, l'année à partir de laquelle la production aura doublé par rapport à 2014.

Pour ce faire, résolvons $u_n = 2u_0$ c'est-à-dire $u_0(1{,}05)^n = 2u_0$ soit $(1{,}05)^n = 2$

$1{,}05^n = 2 \iff \ln 1{,}05^n = \ln 2 \iff n \ln 1{,}05 = \ln 2 \iff n = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}05}$

Or $\dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}05} \approx 14{,}21$ donc l'année à partir de laquelle la production aura doublé par rapport à 2014 est $2014 + 15 = 2029$.

ANNEXE A (à compléter, numéroter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 3

Cochons, pour chaque question posée, la réponse qui convient.

1. Soit X une variable aléatoire distribuée suivant la loi normale de paramètres μ= 40 et σ= 6.
$P(X < 28)$ est égale à :

☐ 0,05 ☐ 0,95 ☐ $P(X < 52)$ ☑ $P(X > 52)$

2. Le plus petit entier n possible tel que : $2{,}08^n \geqslant 500$ est :

☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☑ 9

3. A et B sont deux évènements indépendants d'une même expérience aléatoire.
On a $P(A) = 0{,}6$ et $P(A \cap B) = 0{,}3$. Alors, la valeur de $P(B)$ est :

☐ impossible à déterminer ☐ 0,3 ☑ 0,5 ☐ 0,9

4. On considère l'algorithme ci-dessous :

```
Saisir x
Si x > 0
Alors x prend la valeur ln(x)
Sinon x prend la valeur 2 − x
Fin Si
Afficher x
```

En exécutant cet algorithme, le résultat affiché est 1.
Quel nombre x a été saisi initialement par l'utilisateur ?

☐ 0 ☐ 1 ☑ e ☐ 3

EXERCICE 4

Question 3

```
u prend pour valeur 16 714
n prend pour valeur 0
Tant que u < 33 428.(= 2 × 16 714)
        n prend la valeur n + 1
        u prend la valeur u × 1,05
Fin tant que
Afficher 2014 + n
```