Corrigé du baccalauréat S.T.A.V.
Métropole–La Réunion septembre 2019

EXERCICE 1 **4 points**

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$ dont les variations sont données dans le tableau ci-dessous :

x	-2		-1		4		$+\infty$
Variations de f	‖		3				$+\infty$
	‖ $-\infty$	↗		↘	-1	↗	

1. La valeur de $f'(-1)$ est :

☐ 3 ☐ 4 ☒ 0 ☐ on ne peut pas savoir.

> En $x=-1$, la fonction f admet un maximum donc la fonction dérivée f' s'annule et change de signe : $f'(-1)=0$.

2. La courbe représentative de f admet pour asymptote la droite d'équation :

☐ $x=-1$ ☐ $y=3$ ☒ $x=-2$ ☐ on ne peut pas savoir.

> D'après le tableau de variations, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=-\infty$ donc la droite d'équation $x=-2$ est asymptote verticale à la courbe représentant la fonction f.

3. Le nombre de solution(s) de l'équation $f(x)=0$ dans l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$ est :

☐ 0 ☐ 1 ☒ 3 ☐ on ne peut pas savoir.

> On utilise le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.
>
> - Sur l'intervalle $]-2\ ;\ -1]$, la fonction f passe d'une valeur négative à une valeur positive donc l'équation $f(x)=0$ a une unique solution sur cet intervalle.
> - Sur l'intervalle $[-1\ ;\ 4]$, la fonction f passe d'une valeur positive à une valeur négative donc l'équation $f(x)=0$ a une unique solution sur cet intervalle.
> - Sur l'intervalle $[4\ ;\ +\infty[$, la fonction f passe d'une valeur négative à une valeur positive donc l'équation $f(x)=0$ a une unique solution sur cet intervalle.
>
> L'équation $f(x)=0$ admet donc 3 solutions dans l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$.

4. Dans l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x)\leqslant 0$ est :

☐ $]-\infty\ ;\ 0]$ ☐ $[-1\ ;\ 3]$ ☒ $[-1\ ;\ 4]$ ☐ on ne peut pas savoir.

> Le plus grand ensemble sur lequel la fonction f est décroissante est $[-1\ ;\ 4]$.

EXERCICE 2 **6 points**

Dans un verger, on a planté deux variétés anciennes d'abricotiers : la variété Ampuis et la variété Beaugé. Pour la commercialisation des abricots, le diamètre du fruit doit être supérieur ou égal à 2,5 cm.
On a constaté que :

- 35 % des abricots sont de la variété Ampuis.
- Parmi les abricots de la variété Ampuis, 75 % ont un diamètre supérieur ou égal à 2,5 cm.
- Parmi les abricots de la variété Beaugé, 65 % ont un diamètre supérieur ou égal à 2,5 cm.

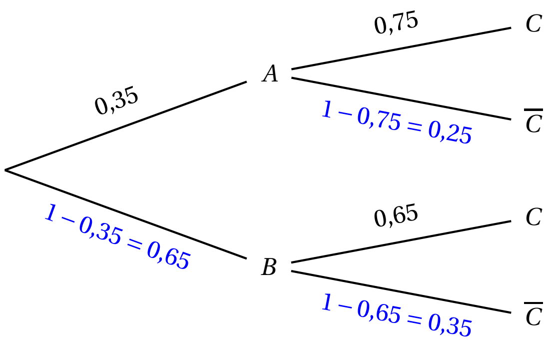
On choisit un abricot au hasard. On considère les évènements suivants :

A : « l'abricot choisi est de la variété Ampuis ».

C : « l'abricot choisi a un diamètre supérieur ou égal à 2,5 cm ».

Partie A

1. On traduit cette situation à l'aide d'un arbre pondéré de probabilités :



2. $p\left(A \cap \overline{C}\right) = p(A) \times p_A\left(\overline{C}\right) = 0,35 \times 0,25 = 0,0875$

3. D'après la formule des probabilités totales :

$p\left(\overline{C}\right) = p\left(A \cap \overline{C}\right) + p\left(B \cap \overline{C}\right) = 0,0875 + 0,65 \times 0,35 = 0,0875 + 0,2275 = 0,315.$

4. Sachant que l'abricot choisi a un diamètre inférieur à 2,5 cm, la probabilité que l'abricot soit de la variété Ampuis est $p_{\overline{C}}(A) = \dfrac{p\left(A \cap \overline{C}\right)}{p\left(\overline{C}\right)} = \dfrac{0,0875}{0,315} \approx 0,2778.$

5. Les évènements A et $\overline{C}$ sont indépendants si et seulement si $p\left(A \cap \overline{C}\right) = p(A) \times p\left(\overline{C}\right)$.

- $p\left(A \cap \overline{C}\right) = 0,0875$
- $p(A) \times p\left(\overline{C}\right) = 0,35 \times 0,315 = 0,11025$

$p\left(A \cap \overline{C}\right) \neq p(A) \times p\left(\overline{C}\right)$ donc les évènements A et $\overline{C}$ ne sont pas indépendants.

Partie B

On prélève dans la population d'abricots, au hasard et successivement, 25 abricots. La population est assez grande pour que ces prélèvements soient considérés comme indépendants les uns des autres. La probabilité qu'un abricot ne soit pas commercialisable est de 0,315 .

Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre d'abricots non commercialisables.

1.
- L'expérience consiste à extraire un abricot et il y a deux issues : il n'est pas commercialisable, avec une probabilité de $p = 0,315$, ou il est commercialisable, avec une probabilité de $1 - p = 1 - 0,315 = 0,685$.
- On répète cette expérience dans les mêmes conditions en effectuant $n = 25$ prélèvements indépendants.

On en déduit que la variable aléatoire X qui donne le nombre d'abricots non commercialisables suit la loi binomiale de paramètres $n = 25$ et $p = 0,315$.

2. La probabilité qu'exactement 4 abricots ne soient pas commercialisables est :

$p(X = 4) = \dbinom{25}{4} \times 0,315^4 \times (1 - 0,315)^{25-4} \approx 0,0441$

3. $E(X) = np = 25 \times 0,315 = 7,875$

En moyenne, il y a donc environ 8 abricots non commercialisables par lot de 25.

EXERCICE 3 **4 points**

Dans un bassin naturel, le lagunage peut être assuré par des plantes épuratives telles que la jacinthe d'eau.
Un test a été réalisé dans un bassin naturel : le premier jour de chaque mois, on mesure la concentration d'algues vertes dans ce bassin. Au 1er janvier 2018, la concentration est de 102 mg/L. On a introduit à cette même date des jacinthes d'eau. La concentration diminue tous les mois de 3 %.
On appelle u_n la concentration en algues vertes n mois après l'introduction des jacinthes d'eau.
On a donc $u_0 = 102$.

1. La concentration d'algues vertes dans ce bassin au 1er février 2018, c'est-à-dire au bout d'un mois, est en mg/L de $102 - \dfrac{3}{100} \times 102 = 98{,}94$.
2. Diminuer de 3 %, c'est multiplier par $1 - \dfrac{3}{100} = 0{,}97$; donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}97$ et de premier terme $u_0 = 102$.
   On en déduit que pour tout n, on a $u_n = u_0 \times q^n = 102 \times 0{,}97^n$.
3. On estime que l'objectif est atteint par le lagunage quand la concentration en algues vertes est strictement inférieure à 80 mg/L.
   On complète l'algorithme fourni en annexe qui détermine le nombre de mois nécessaires pour que le lagunage atteigne l'objectif pour ce bassin :

Variables :	N est de type nombre entier U est de type nombre réel
Initialisation :	N prend la valeur 0 U prend la valeur 102

Traitement :	Tant que U $\geqslant$ 80
	  N prend la valeur N + 1
	  U prend la valeur U × 0,97
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher N

4. À la calculatrice, on trouve $u_7 = 102 \times 0{,}97^7 \approx 82{,}4$ et $u_8 = 102 \times 0{,}97^8 \approx 79{,}9$; la valeur de N en sortie d'algorithme est donc 8. Le mois numéro 0 est janvier, donc le mois numéro 8 est septembre ; c'est donc au 1er septembre que l'objectif sera atteint.

EXERCICE 4 **6 points**

Un laboratoire teste l'efficacité d'un nouveau désodorisant d'intérieur bio, à diffusion lente, fabriqué avec 99,9 % de produits naturels. La fonction g modélise le taux d'efficacité du désodorisant (en pourcentage) en fonction du temps t exprimé en heures.
g est définie sur $[0\,;\,24]$ par $g(t) = 50t\,\text{e}^{-0{,}5t+1}$.

1. La courbe $\mathscr{C}_g$, donnée en annexe est la représentation graphique de g dans un repère orthogonal.
   a. D'après le graphique, le taux d'efficacité est maximal et vaut 100 % pour $t = 2$ donc au bout de 2 heures.
   b. Le désodorisant est considéré comme efficace lorsque le taux d'efficacité est supérieur ou égal à 40 %. Il est commercialisable lorsqu'il est considéré comme efficace pendant 5 heures et demie ou plus.
   D'après le graphique, l'efficacité est supérieure à 40 % sur l'intervalle $[0{,}4\,;\,6]$ (environ), ce qui fait une durée de plus de 5 heures et demie ; le déodorant est donc commercialisable.
2. **a.** Pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,24]$,
   $g'(t) = 50 \times \text{e}^{-0{,}5t+1} + 50t \times (-0{,}5)\,\text{e}^{-0{,}5t+1} = (50 - 25t)\,\text{e}^{-0{,}5t+1}$.

b. Pour tout t, $\mathrm{e}^{-0,5t+1} > 0$ donc le signe de $g'(t)$ est celui de $50-25t$:
$50-25t > 0 \iff 50 > 25t \iff 2 > t \iff t < 2$
D'où le tableau de signe de $g'(t)$:

t	0		2		24
$g'(t)$		+	0	−	

c. $g(0) = 0$, $g(2) = 50 \times 2 \times \mathrm{e}^{0} = 100$ et $g(24) = 50 \times 24 \times \mathrm{e}^{-11} \approx 0,02$
On construit le tableau des variations de g sur $[0\,;\,24]$:

t	0		2		24
$g'(t)$		+	0	−	
$g(t)$	0	↗	100	↘	$\approx 0,02$

3. a. $g(0,5) = 50 \times 0,5 \times \mathrm{e}^{0,75} \approx 52,9$ et $g(6) = 50 \times 6 \times \mathrm{e}^{-2} \approx 40,6$

b.
- D'après le tableau de variations de g, si $0,5 \leqslant t \leqslant 2$, alors $g(0,5) \leqslant g(t) \leqslant g(2)$; cela veut dire que $52,9 \leqslant g(t) \leqslant 100$.
  Donc pour tout t de $[0,5\,;\,2]$, on a $g(t) > 40$.
- D'après le tableau de variations de g, si $2 \leqslant t \leqslant 6$, alors $g(2) \geqslant g(t) \geqslant g(6)$; cela veut dire que $100 \geqslant g(t) \geqslant 40,02$.
  Donc pour tout t de $[2\,;\,6]$, on a $g(t) > 40$.
- On déduit que pour tout t de $[0,5\,;\,6]$, on a $g(t) > 40$.
- De plus, $6 - 0,5 = 5,5$.

On peut donc dire que les deux conditions données à la question textbf1. b. sont bien réalisées.

ANNEXE C (à compléter, numéroter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 4

Courbe $\mathscr{C}_g$