Corrigé du baccalauréat S. T. A. V. 11 juin 2015
Métropole-Antilles-Guyane-La Réunion

La calculatrice est autorisée.

Les annexes A et B sont à rendre avec la copie

EXERCICE 1 **5 points**

Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A

Les résultats numériques seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-2} près.

Un fabricant de terreau répartit sa production en sacs de 50 litres. Afin de vérifier sa mise en sac, il mesure le volume de terreau de 20 sacs. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

50,5	50,1	49	50,9	47,9
49,8	50	48,9	51,1	49,7
50,2	52,2	49,7	49,4	52
49,4	50,1	48,9	50,8	50,7

1. À l'aide de la calculatrice la moyenne est 50,07 et l'écart-type de cet échantillon 1,02.
2. Le fabricant est satisfait de la moyenne relevée : elle paraît conforme aux 50 litres attendus. Par contre, il s'inquiète que certains sacs contiennent plus de 52 litres de terreau.

   Soit X la variable aléatoire, qui à tout sac prélevé au hasard dans la production associe son volume de terreau, exprimé en litres. On admet que X est distribué selon la loi normale de moyenne $\mu = 50$ et d'écart-type $\sigma = 1$.

   a. À l'aide de la calculatrice $p(48 \leqslant X \leqslant 52) \approx 0,95$.

   remarque : Nous savons que dans le cas d'une distribution normale $p(\overline{x} - 2\sigma \leqslant X \leqslant \overline{x} + 2\sigma) \approx 0,95$.

   La probabilité que le volume du sac soit comprise entre $48\,\ell$ et $52\,\ell$ est 0,95.

   b. Déterminons la probabilité qu'un sac pris au hasard dans la production contienne plus de 52 litres de terreau.

   $p(X > 52) = 1 - p(X \leqslant 52) = 1 - 0,98 = 0,02$.

   remarque : à partir de la considération de la symétrie de la courbe nous pouvons dire que $p(X \leqslant 48) = p(X \geqslant 52) = \dfrac{1 - 0,95}{2}$

PARTIE B

Une usine conditionne des sacs de 50 litres de terreau. On considère que 2,3 % des sacs qu'elle fournit contiennent moins de 48 litres de terreau. Elle livre sa production par lots de 200 sacs.
On suppose que la production est suffisamment importante pour que le choix des 200 sacs puisse être assimilé à un prélèvement avec remise.

On rappelle que :
Pour une proportion p connue dans une population, l'intervalle de fluctuation asymptotique au niveau de confiance de 0,95 *d'une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n est :*

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

1. Déterminons l'intervalle de fluctuation asymptotique au niveau de confiance de 0,95 de la fréquence de sacs contenant moins de 48 litres de terreau pour un échantillon de taille 200.

$$\left[0,023 - 1,96\sqrt{\frac{0,023(1-0,023)}{200}}\ ;\ 0,023 + 1,96\sqrt{\frac{0,023(1-0,023)}{200}}\right] = \left[0,002\ ;0,044\right]$$

Les bornes de l'intervalle sont arrondies à 10^{-3} près.

2. Un responsable d'une pépinière constate que, parmi les 200 sacs livrés par cette usine, 4,5 % de ces sacs contiennent moins de 48 litres de terreau.

   Il en droit de porter réclamation puisque 0,045 n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation.

EXERCICE 2 — 7 points

Un laboratoire d'analyses sanitaires s'intéresse à l'évolution d'une substance polluante présente dans un réservoir contenant 60 000 litres d'eau et destiné à abreuver du bétail. Le technicien en charge des analyses maintient ce volume d'eau tout au long de l'expérimentation.
On admet que le volume, exprimé en litres, de substance polluante présente dans le réservoir est modélisé par une fonction f définie par

$$f(t) = 1\,800\left(1 - \mathrm{e}^{-0,03t}\right)$$

où t est le temps exprimé en minutes.
On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal, donnée en ANNEXE A.

1. **a.** Déterminons la limite de f en $+\infty$.
   $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(1800(1-\mathrm{e}^{-0,003t})\right) = \lim_{t\to+\infty} 1800 \times \lim_{t\to+\infty}(1-\mathrm{e}^{-0,003t}) = 1\,800\times 1 = 1\,800$ car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x} = 0$.

   b. Calculons $f'(t)$ pour tout réel t de $[0\,;\,+\infty[$.
   $f'(t) = 1\,800\left(-(-0,03)\mathrm{e}^{-0,03t}\right) = 54\mathrm{e}^{-0,03t}$.

   c. Pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$, $f'(t) > 0$ comme produit de réels positifs.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
   Pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$, $f'(t) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.
   Dressons maintenant le tableau de variation de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	
Variation de f	0	$\nearrow$	$1\,800$

2. Calculons d'abord 3 % du volume du réservoir. $\dfrac{3}{100} \times 60\,000 = 1\,800$

   Puisque le volume de substance polluante ne peut dépasser $1\,800\,\ell$ d'après la limite en l'infini, il ne pourra alors pas dépasser les 3 % du volume du réservoir.

3. La santé du bétail est menacée lorsque le volume de substance polluante dans le réservoir dépasse 1 200 litres.

   a. Déterminons graphiquement, avec la précision permise par le graphique, le temps (arrondi à l'unité) à partir duquel la santé du bétail est menacée par la présence dans le réservoir de cette substance polluante.
   Nous traçons la droite d'équation $y = 1\,200$ et lisons l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec la courbe. Nous obtenons, arrondi à l'unité, environ 37.
   À partir d'environ 37 minutes, la santé du bétail est menacé.

   b. Retrouvons ce résultat par le calcul.
   pour ce faire, résolvons $f(t) > 1200$.

$$\begin{aligned}
1\,800\left(1-\mathrm{e}^{-0,03t}\right) &> 1\,200\\
-1\,800\mathrm{e}^{-0,03t} &> 1\,200 - 1\,800\\
-1\,800\mathrm{e}^{-0,03t} &> -600\\
\mathrm{e}^{-0,03t} &> \frac{-600}{-1\,800}\\
\mathrm{e}^{-0,03t} &> \frac{1}{3}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\frac{1}{\mathrm{e}^{0,03t}} &> \frac{1}{3}\\
\mathrm{e}^{0,03t} &> 3\\
0,03t &> \ln 3\\
t &> \frac{\ln 3}{0,03}\\
t &> \frac{100\ln 3}{3}
\end{aligned}$$

$t > 36{,}62$. Par le calcul nous retrouvons le résultat précédent, à la précision permise par le graphique.

4. On désigne par V_m le volume moyen de substance polluante présente dans le réservoir pendant les 60 premières minutes. On admet que

$V_m = \dfrac{1}{60}\displaystyle\int_0^{60} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Calculons V_m.

$$V_m = \frac{1}{60}\int_0^{60} \left(1\,800\left(1-\mathrm{e}^{-0{,}03t}\right)\right)\mathrm{d}t.$$
$$V_m = \frac{1}{60}\int_0^{60} 1\,800\mathrm{d}t - \frac{1}{60}\int_0^{60} 1\,800\left(\mathrm{e}^{-0{,}03t}\right)\mathrm{d}t.$$
$$V_m = 30\int_0^{60}\mathrm{d}t - 30\int_0^{60}\left(\mathrm{e}^{-0{,}03t}\right)\mathrm{d}t.$$
$$V_m = 30\Big[t\Big]_0^{60} - 30\left[-\frac{1}{0{,}03}\mathrm{e}^{-0{,}03t}\right]_0^{60}$$
$$V_m = 30\Big[t\Big]_0^{60} + 1\,000\left[\mathrm{e}^{-0{,}03t}\right]_0^{60}$$
$$V_m = 1\,800 + 1\,000\left(\mathrm{e}^{-1{,}8} - 1\right)$$
$$V_m = 800 + 1\,000\mathrm{e}^{-1{,}8}$$

Donnons maintenant sa valeur approchée arrondie à 10^{-1} près. $V_m \approx 965{,}3$.

EXERCICE 3 — 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples, donné en ANNEXE B (à rendre avec la copie).

Pour chaque proposition, une seule réponse est exacte. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse inexacte enlève 0,25 *point et l'absence de réponse n'enlève et n'ajoute pas de point. Si le total des points est négatif, la note attribuée à cet exercice sera ramenée à zéro.*

Cocher, pour chaque proposition, la réponse qui convient. Aucune justification n'est demandée.

ANNEXE B (à compléter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 3 : QCM

Soit X la variable aléatoire distribuée selon la loi binomiale de paramètres $n = 25$ et $p = 0{,}08$.

1. $P(X = 0)$ est égale à

☐ ~~$0{,}08^0$~~ ☐ ~~$0{,}08^{25}$~~ ☑ $0{,}92^{25}$

2. Une valeur approchée de $P(X = 4)$ à 10^{-2} près est

☐ ~~0,72~~ ☑ 0,09 ☐ ~~0,95~~

3. Une valeur approchée de $P(X \leqslant 5)$ à 10^{-2} près est

☐ ~~0,03~~ ☑ 0,99 ☐ ~~0,66~~

4. $\mathrm{E}(X)$ est égale à

☑ 2 ☐ ~~0,08~~ ☐ ~~1,36~~

EXERCICE 4 — 4 points

Dans une région donnée, on constate une baisse de 4,5 % par an du nombre d'apiculteurs professionnels.

En 2010, on a recensé 525 apiculteurs professionnels dans cette région.

On appelle u_n le nombre de ces apiculteurs professionnels le 1er janvier de l'année $2010 + n$, ainsi $u_0 = 525$.

1. Déterminons le nombre de ces apiculteurs professionnels en 2011. À une baisse de 4,5 % correspond un coefficient multiplicateur de $(1-0{,}045)$ c'est-à-dire 0,955. $525\times 0{,}955 = 501{,}375$.

Il restait par conséquent 501 apiculteurs en 2011.

2. Le nombre d'apiculteurs restant l'année $n+1$ se déduit du nombre d'apiculteurs l'année n en multipliant ce nombre par le coefficient multiplicateur 0,955 par conséquent nous obtenons bien

$u_{n+1} = 0{,}955 \times u_n$ pour tout entier naturel n.

3. La Direction Régionale de l'Alimentation, de l'Agriculture et de la Forêt de cette région surveille le nombre d'apiculteurs professionnels et estime que ce nombre ne doit pas être strictement inférieur à 300 afin de préserver l'approvisionnement régional en miel et assurer la pollinisation.

Parmi les trois algorithmes proposés ci-dessous, seul l'algorithme 1 permet de déterminer l'année où le nombre d'apiculteurs professionnels sera strictement inférieur à 300.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
Variables : U réel N entier naturel **Initialisation :** Affecter à N la valeur 0 Affecter à U la valeur 525 **Traitement :** Tant que $U \geqslant 300$ U prend la valeur $U \times 0{,}955$ N prend la valeur $N+1$ Fin du Tant que **Sortie :** Afficher $2010+N$	**Variables :** U réel N entier naturel **Initialisation :** Affecter à N la valeur 0 Affecter à U la valeur 525 **Traitement :** Tant que $U \geqslant 300$ U prend la valeur $U \times 0{,}045$ N prend la valeur $N+1$ Fin du Tant que **Sortie :** Afficher $2010+N$	**Variables :** U réel N entier naturel **Initialisation :** Affecter à N la valeur 0 Affecter à U la valeur 525 **Traitement :** Tant que $U \geqslant 300$ U prend la valeur $U \times 0{,}955$ Fin du Tant que N prend la valeur $N+1$ **Sortie :** Afficher $2010+N$

a. l'algorithme 2 ne donne pas le résultat escompté car U n'est pas la valeur de l'année suivante mais l'effectif venant en diminution ; l'algorithme 3 non plus car N est en dehors de la boucle par conséquent n'augmente pas.

b. À l'aide de la calculatrice et en faisant fonctionner l'algorithme 1, l'approvisionnement régional du miel et la pollinisation ne sont plus préservés à partir de 2023.

ANNEXE A (à compléter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 2 Courbe représentative de la fonction f

Si vous photocopiez ce corrigé pensez à en créditer l'**A. P. M. E. P.**, merci.