Corrigé du baccalauréat S. T. A. V. 9 juin 2017
Métropole–La Réunion

La calculatrice est autorisée.

L'annexe A est à rendre avec la copie

EXERCICE 1 **6 points**

Les parties A et B sont indépendantes

Une entreprise de production de miel commercialise des pots de 250 g de miel d'acacia, ces pots contenant aussi des fruits secs.

Partie A

La masse de fruits secs présents dans un pot de miel, exprimée en g, est une variable aléatoire X distribuée selon la loi normale de moyenne $\mu = 75$ et $\sigma = 4$.
L'entreprise considère que le remplissage du pot est conforme si la masse de fruits secs contenus dans un pot de miel est comprise entre 65 g et 85 g. Dans le cas contraire il est non conforme.

1. À l'aide de la calculatrice ou du tableau de valeurs suivant, donnons la probabilité, arrondie à 10^{-4} près qu'un pot soit conforme.
Pour ce faire, calculons $p(65 \leqslant X \leqslant 85)$.
$p(65 \leqslant X \leqslant 85) = p(X \leqslant 85) - p(X \leqslant 65) = 0{,}993\,8 - 0{,}006\,2 = 0{,}987\,6$.

a	60	65	70	75	80	85	90	95
$P(X < a)$	0,000 1	0,006 2	0,105 6	0,5	0,894 4	0,993 8	0,999 9	1

Des cartons de 6 pots ont été formés en prélevant ces pots au hasard parmi l'ensemble des pots en bout de chaîne de production. Le nombre de pots produits est suffisamment important pour considérer indépendant le choix des pots constituant le carton.
On considère pour la suite que la probabilité de choisir un pot conforme est de 0, 99.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de pots conformes, parmi les 6 pots prélevés constituant un carton.

2. Justifions que la loi de probabilité de Y est la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,99$.
Y est distribuée selon la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0{,}99$ puisque il y a répétition de 6 tirages indépendants et identiques caractérisés par deux issues soit le pot est conforme avec une probabilité $p = 0,99$ soit le pot n'est pas conforme de probabilité $q = 1 - p = 0,01$.
Par conséquent, $p(Y = k) = \binom{6}{k}(0{,}99)^k(0{,}01)^{6-k}$.
3. Déterminons $p(Y = 6)$ arrondi à 10^{-2} près
$p(Y = 6) = \binom{6}{6}(0{,}99)^6(0{,}01)^{6-6} = 0{,}99^6 \approx 0{,}94$
La probabilité que les six pots choisis soient conformes est à 10^{-2} près de 0,94.
4. Déterminons la probabilité qu'un carton contienne au moins un pot non conforme.
L'événement contraire est :« tous les pots sont conformes ».
Par conséquent, la probabilité qu'un carton contienne au moins un pot non conforme est :
$1 - p(Y = 6) = 1 - 0{,}94 = 0{,}06$.

Partie B

Les fruits secs contenus dans les pots de miel sont soit des amandes, soit des noix, soit des noisettes.
Il n' y a qu'un seul type de fruit sec par pot.
Le laboratoire d'analyse de qualité de cette entreprise, étudie la masse en grammes de noisettes, noix et amandes présentes dans 240 pots conformes de miel d'acacia, prélevés au hasard dans la chaîne de fabrication.
Voici les résultats obtenus par le laboratoire après la pesée des fruits secs contenus dans 240 pots.

Masse en grammes de fruits secs \ Fruits secs utilisés	Noisettes	Noix	Amandes
[65 ; 70[	4	4	7
[70 ; 75[	29	33	32
[75 ; 80[	32	41	37
[80 ; 85[	6	8	7

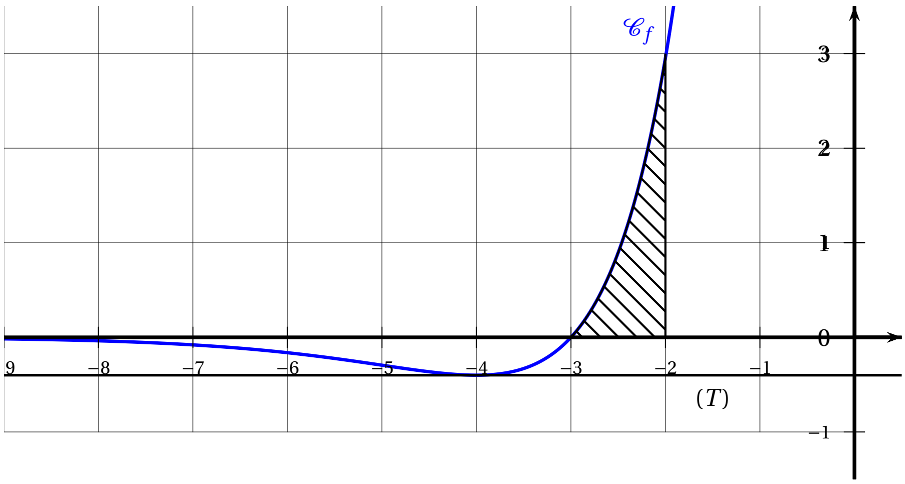
1. **a.** Le tableau des effectifs marginaux est complété sur celui situé en **annexe A (à rendre avec la copie)**.

   b. Le tableau des profils colonnes et du profil marginal des colonnes est complété sur celui situé en **annexe A (à rendre avec la copie)**. Les résultats ont été arrondis à 10^{-2} près si nécessaire.

   c. La masse de fruits secs contenue dans les pots ne dépend pas de la nature du fruit sec puisque dans chaque cas la proportion est souvent la même.

EXERCICE 2 **4 points**

La courbe $\mathscr{C}_f$ donnée ci-dessous, est la représentation graphique dans un repère orthogonal d'une fonction f définie sur $]-\infty\,;\,0]$. La droite (T), parallèle à l'axe des abscisses, est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse -4.
L'axe des abscisses est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.



Précisons pour chacune des propositions qui suivent si elle est vraie ou fausse puis justifions la réponse :

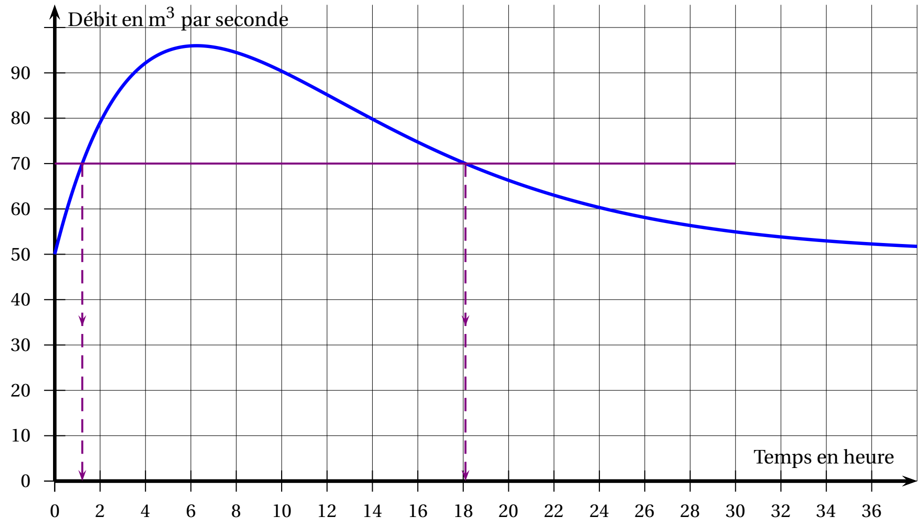
1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -9$.
   La proposition est fausse car l'axe des abscisses est asymptote à la courbe, nous avons alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
2. $f'(-4) = 0$.
   La proposition est vraie car la tangente au point d'abscisse -4 à la courbe est parallèle à l'axe des abscisses.
3. $f'(x) < 0$ sur $[-4\,;\,-3]$.
   La proposition est fausse car la fonction est croissante sur $[-4\,;\,-3]$.
4. $\displaystyle\int_{-3}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 3$.
   La proposition est fausse car l'aire du domaine plan délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -3$ et $x = -2$ est inférieure à 3 unités d'aire, *partie hachurée sur le graphique*.

EXERCICE 3 **6 points**

Après un épisode pluvieux, un organisme surveille la crue et la décrue d'une rivière qui traverse une zone habitée.

Partie A

Les relevés des débits, exprimés en $m^3 \cdot s^{-1}$ (mètre cube par seconde), ont permis d'établir la courbe ci-dessous pour les premières heures :



En utilisant le graphique, avec la précision permise par le graphique, répondons sans justification aux questions suivantes :

1. Le débit de la rivière au début de la crue est de $50\,m^3 \cdot s^{-1}$.
2. Le débit maximal est d'environ $95\,m^3 \cdot s^{-1}$. Le moment auquel il est atteint est d'environ 6 heures.
3. On considère qu'il y a des risques d'inondations au-delà d'un débit de la rivière de $70\,m^3 \cdot s^{-1}$. Donnons l'intervalle de temps pendant lequel il y a des risques d'inondations. Traçons la droite d'équation $y = 70$, lisons les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite. Nous lisons environ 1 et environ 18 . L'intervalle est alors approximativement $]1\,;\,18[$.

Partie B

On admet que l'évolution du débit de la rivière est modélisé par la fonction f définie sur $[0\,;\,60]$ par :

$$f(x) = 50 + 20x\mathrm{e}^{-0,16x}$$

où x représente le temps en heure et $f(x)$, le débit en $m^3 \cdot s^{-1}$.

1. Déterminons une valeur approchée de $f(60)$ arrondie à l'unité.
   $f(60) = 50 + 20 \times 60 \times \mathrm{e}^{-0.16\times 60} \approx 50$. Au bout de 60 heures, le débit est revenu celui du début de la crue.
2. **a.** Montrons que $f'(x) = (20 - 3,2x)\mathrm{e}^{-0,16x}$. En effet,
   $f'(x) = 0+20\times\mathrm{e}^{-0,16x}+20x\times(-0,16\mathrm{e}^{-0,16x}) = 20\,\mathrm{e}^{-0,16x}-3,2x\,\mathrm{e}^{-0,16x} = (20-3,2x)\mathrm{e}^{-0,16x}$

   b. Étudions le signe de $f'(x)$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-0,16x} > 0$ par conséquent il en est de même sur $[0\,;\,60]$, le signe de $f'(x)$ est alors celui de $20 - 3,2x$.
   Sur $\mathbb{R}$, $20 - 3,2x > 0$ est équivalent à $x < 6,25$. Par conséquent
   Si $x \in [0\,;\,6,25[$, $f'(x) > 0$ et si $x \in]6,25\,;\,60]$, $f'(x) < 0$

c. Étudions d'abord, la variation de f sur l'intervalle $[0;60]$.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
Pour $x \in [0\,;\,6{,}25[$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.
Si pour tout $x \in I\, f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
Pour $x \in]6{,}25\,;\,60]$, $f'(x) < 0$, par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.
Dressons le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;60]$.

x	0		6,25		60
$f'(x)$		+	0	−	
Variations de f			95,98		
	50	↗		↘	50,08

d. Précisons alors la réponse à la question 2 de la partie A (arrondir à 10^{-2} près).
le débit maximal est de $95{,}98\,\text{m}^3/\text{s}$ atteint en 6,25 heures.

3. On admet que F définie par $F(x) = 50x - (781{,}25 + 125x)\text{e}^{-0{,}16x}$ est une primitive de f sur $[0;60]$.

La quantité d'eau apportée par la rivière lors de la crue est $I = \displaystyle\int_0^{6{,}25} f(x)\,\text{d}x$.

a. Calculons la valeur exacte de $I = \displaystyle\int_0^{6{,}25} f(x)\,\text{d}x$.

$$\int_0^{6{,}25} f(x)\,\text{d}x = \Big[50x - (781{,}25 + 125x)\text{e}^{-0{,}16x}\Big]_0^{6{,}25}$$

$I = 50 \times 6{,}25 - (781{,}25 + 125 \times 6{,}25)\text{e}^{-0{,}16\times 6{,}25} - \big(50 \times 0 - (781{,}25 + 125 \times 0)\text{e}^{-0{,}16\times 0}\big)$

$I = 312{,}5 - 1\,562{,}5\text{e}^{-1} - (-781{,}25)$

$I = 1\,093{,}75 - 1\,562{,}5\text{e}^{-1}$.

b. Une valeur approchée au m^3 près de I est alors $516\,\text{m}^3$.

Exercice 4 — 4 points

En 2016, on comptait en France, 650 000 colonies d'abeilles. Du fait du taux de mortalité important chez ces insectes, on observe que le nombre de colonies baisse de 7,5 % par an et on considère que cette tendance devrait se poursuivre dans les années à venir.
On note u_n le nombre de colonies d'abeilles l'année $(2016 + n)$ et $u_0 = 650\,000$.

1. À une baisse de 7,5 % correspond un coefficient multiplicateur de $1 - 0{,}075$ soit 0,925. Chaque terme se déduisant du précédent en le multipliant par un même nombre par conséquent (u_n) est une suite géométrique de raison 0,925. Le premier terme est $u_0 = 650\,000$.

2. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 q^n$.
Il en résulte :
$u_n = 650\,000 \times 0{,}925^n$.

3. Expliquons ce que réalise l'algorithme ci-dessous dans le contexte de l'exercice :

```
u prend pour valeur 650 000
n prend pour valeur 0
Tant que u > 100 000
        n prend la valeur n + 1
        u prend la valeur 0,925 × u
Fin tant que
Afficher n
```

Cet algorithme permet de déterminer le temps nécessaire pour que les colonies d'abeilles soient inférieures à 100 000

4. Par la méthode de notre choix, déterminons au bout de combien d'années le nombre de colonies d'abeilles passera en dessous de 100 000.

Nous pouvons traduire cet algorithme dans le langage de la machine et lire la réponse : $n = 25$.

Nous pouvons aussi résoudre l'inéquation $650\,000(0,925)^n \leqslant 100\,000$.

$$\begin{aligned}
650\,000(0,925)^n &< 100\,000\\
0,925^n &< \frac{100\,000}{650\,000}\\
0,925^n &< \frac{2}{13}\\
n\ln 0,925 &< \ln\left(\frac{2}{13}\right)\\
n &> \frac{\ln\left(\frac{2}{13}\right)}{\ln 0,925} \qquad \text{car } \ln 0,925 < 0
\end{aligned}$$

or $\dfrac{\ln\left(\frac{2}{13}\right)}{\ln 0,925} \approx 24,0093$.

Par conséquent au bout de vingt-cinq ans, le nombre de colonies d'abeilles sera inférieur à 100 000.

ANNEXE A (à compléter et à rendre avec la copie)

Exercice 1 :

Partie B

Question 1. a.

Fruits secs utilisés / Masse en grammes de fruits secs	Noisettes	Noix	Amandes	Total
[65 ; 70[	4	4	7	15
[70 ; 75[	29	33	32	94
[75 ; 80[	32	41	37	110
[80 ; 85[	6	8	7	21
Total	71	86	83	240

Question 1. b. : arrondir à 10^{-2} près

Fruits secs utilisés / Masse en grammes de fruits secs	Noisettes	Noix	Amandes	Total
[65 ; 70[	0,06	0,05	0,08	0,06
[70 ; 75[	0,41	0,38	0,39	0,39
[75 ; 80[	0,45	0,48	0,45	0,46
[80 ; 85[	0,08	0,09	0,08	0,09
Total	1	1	1	1