Corrigé du baccalauréat STAV
Métropole–La Réunion 7 juin 2019

La calculatrice est autorisée.

L'annexe A est à rendre avec la copie après avoir été numérotée

Les quatre exercices sont indépendants

EXERCICE 1 **6 points**

Partie A

Afin de préparer un voyage à l'étranger, une personne se renseigne sur l'efficacité d'un traitement contre le paludisme. Le traitement n'est pas efficace à 100 %, on peut quand même être malade en ayant pris le traitement.
Une étude montre que, pour les voyageurs français partis récemment dans un pays où le paludisme sévit :

- 60 % ont pris le traitement,
- parmi les voyageurs ayant pris le traitement, 2 % ont quand même contracté la maladie.

On choisit un voyageur français au hasard. On considère les évènements suivants :

T : « le voyageur a pris le traitement » et M : « le voyageur a contracté la maladie ».

1. Nous avons complété sur l'annexe A (à rendre avec la copie) les quatre zones pointillées correspondant aux probabilités des évènements de l'arbre de probabilité traduisant la situation.
2. L'évènement $T \cap M$ est : « Le voyageur a pris le traitement et a contracté la maladie ».
   $P(T \cap M) = 0,012$ car $P(T \cap M) = P(T) \times P_T(M) = 0,6 \times 0,02$.
3. Une étude statistique sur les voyageurs français ayant effectué un séjour dans un pays infecté par le paludisme montre que 5 % d'entre eux ont contracté la maladie. Les autorités sanitaires françaises s'appuient sur cette proportion pour effectuer leurs calculs de probabilité.
   a. Justifions que $P\left(\overline{T} \cap M\right) = 0,038$.
   $P(M) = P(T \cap M) + P\left(\overline{T} \cap M\right)$. Nous savons par hypothèse que $P(M) = 0,05$ et d'après la question précédente que $P(T \cap M) = 0,012$.
   Par conséquent $P(\overline{T} \cap M) = 0,05 - 0,012 = 0,038$.
   b. La probabilité que le voyageur ait contracté la maladie sachant qu'il n'a pas pris le traitement est notée $P_{\overline{T}}(M)$.
   $$P_{\overline{T}}(M) = \frac{P\left(\overline{T} \cap M\right)}{P\left(\overline{T}\right)} = \frac{0,038}{0,4} \approx 0,095$$
   Dans cette question, toute démarche, même non aboutie, sera prise en compte dans la notation.
   c. En nous servant de cette étude, nous avons intérêt à prendre le traitement car avec le traitement la probabilité de contacter la maladie est 0,012 tandis que sans traitement, elle est de 0,095 c'est-à-dire d'une valeur nettement supérieure.

Partie B

En France, en 2018, le taux de voyageurs français voyageant dans une zone à risque atteints à leur retour par le paludisme était de 5 %.
Une agence de voyages a permis en 2018 le départ de 116 touristes vers cette zone à risque et 3 ont développé la maladie.
Rappel : *l'intervalle de fluctuation asymptotique à* 0,95 *d'une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n, lorsque la proportion p dans la population est connue, est* :

$$I = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

1. Déterminons l'intervalle de fluctuation asymptotique à 0,95 de la fréquence de personnes ayant développé la maladie en 2018, obtenue sur un échantillon de taille 116

   (les bornes seront arrondies à 10^{-3}près).

   Nous avons : $n = 116$ et $p = 0{,}05$. Par conséquent, $n = 116 > 30$; $np = 116 \times 0{,}05 = 5{,}8 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 116 \times (1-0{,}05) = 100 \times 0{,}95 = 110{,}2 \geqslant 5$.

   Les trois conditions sont réalisées donc nous pouvons déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 %

$$I = \left[0{,}05 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}05(1-0{,}05)}{116}}\ ;\ 0{,}05 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}05(1-0{,}05)}{116}}\right] \approx [0{,}010\ ;\ 0{,}090]$$

2. La fréquence observée dans le groupe est $\dfrac{3}{116} \approx 0{,}026$.

   Or : $0{,}026 \in I$ par conséquent le nombre de malades dans ce groupe de 116 touristes est compatible avec les chiffres de la moyenne nationale des voyageurs, c'est-à-dire 5 % de personnes atteintes.

EXERCICE 2 — 4 points

En 2011, Clémentine a acheté une voiture, son prix était alors de 10 500 €. En 2018, elle décide de changer de voiture car sa famille s'est agrandie. Elle souhaite la revendre pour faciliter l'achat d'une voiture familiale.
On note $P_1 = 10\,500$, le prix de la voiture, en euros, lors de l'achat.

Si besoin les résultats seront arrondis au centime d'euro près.

1. Sachant que la décote, c'est-à-dire la baisse de la valeur d'une voiture est estimée à 14 % par an, déterminons le prix estimé de la voiture de Clémentine en 2012 puis 2013.

   À une baisse de 14 % correspond un coefficient multiplicateur de 0,86.

   En 2012 on a donc $P_1 = 10\,500 \times 0{,}86 = 9\,030$, en 2013 $P_2 = 9\,030 \times 0{,}86 = 7\,765{,}80$

Le prix de la voiture est modélisé par une suite. On note P_n le prix de la voiture après n années.

2. La suite (P_n) est une suite géométrique puisque chaque élément se déduit du précédent en le multipliant par le même nombre 0,86. Il en résulte que la raison de cette suite est 0,86.

3. **a.** Nous avons complété l'algorithme de l'annexe A (à rendre avec la copie) qui a pour but de faire apparaître la valeur de la voiture en 2018.

   b. Le montant auquel Clémentine peut espérer vendre sa voiture en 2018 est de 3 653,24 euros.

On suppose que Clémentine ne réussit pas à vendre sa voiture au prix espéré et qu'elle décide donc de garder sa voiture. Elle souhaite changer de contrat d'assurance et prendre le moins cher possible lorsque le prix de la voiture sera inférieur au dixième de son prix d'achat.

4. Donnons, au bout de combien d'années le prix de la voiture sera inférieur au dixième de son prix d'achat.

   Pour ce faire, résolvons $P_n < \dfrac{P_1}{10}$ c'est-à-dire $10\,500(0{,}86^{n-1}) < 1\,050$ ou $0{,}86^{n-1} < 0{,}1$.

   En prenant le logarithme de chaque membre $(n-1)\ln(0{,}86) < \ln(0{,}1)$

   $n > \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}86} + 1 \approx 16{,}26$.

   Au bout de dix-sept années, le prix de la voiture sera inférieur au dixième de son prix d'achat.

EXERCICE 3 — 7 points

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ 100]$ par :

$$f(x) = -50\ln(x) + 2x + 160.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentant la fonction f dans un repère orthogonal du plan.

1. Déterminons la limite en 0 de cette fonction f.

On a $\lim\limits_{x\to 0} -50\ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} 2x + 160 = 160$.

D'où par somme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

2. Dérivons la fonction f. La fonction f' est définie sur $]0\ ;\ 100]$ par :

$$f'(x) = -50 \times \frac{1}{x} + 2 = \frac{-50+2x}{x}$$

3. Étudions le signe de la dérivée. Puisque $x \in](0\ ;\ 100]$ le signe de la dérivée est celui de $-50+2x$ sur ce même intervalle

Sur $\mathbb{R}$, $\quad -50+2x > 0 \iff x > 25$.

Il en résulte si $x \in]0\ ;\ 25[$, $f'(x) < 0$ et si $x \in]25\ ;\ 100]$, $f'(x) > 0$

Étudions les variations de f :

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.

Sur $]0\ ;\ 25[$, $f'(x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I.

Sur $]25\ ;\ 100]$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.

Dressons le tableau de variations :

x	0		25		100
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	↘	$210-100\ln 5$	↗	$360-100\ln 10$

$210 - 100\ln 5 \approx 49{,}06 \qquad 360 - 100\ln 10 \approx 129{,}74$

4. Donnons, à l'unité près, les solutions de l'équation $f(x) = 60$.

La fonction f est dérivable et strictement décroissante sur $]0\ ;\ 25[$, 60 appartient à l'intervalle $]f(25)\ ;\ +\infty[$, par conséquent il existe une unique valeur α appartenant à $]0\ ;\ 25[$ telle que $f(\alpha) = 60$. À l'aide du menu table d'une calculatrice, nous trouvons à l'unité près 12. De la même manière sur l'intervalle $]25 ; 100[$ nous trouvons à l'unité près 45.

Les solutions de l'équation sont, à l'unité près, 12 et 45.

Partie B

Dans une parcelle, on a relevé un nombre anormalement élevé d'animaux d'une espèce nuisible. La situation est jugée sous contrôle lorsque le nombre d'individus de cette espèce dans cette parcelle est inférieur ou égal à 60.

On met en place une méthode pour tenter de réguler les nuisibles. À partir du premier jour, l'évolution du nombre d'animaux de cette espèce en fonction du temps est modélisée par la fonction définie sur $]1\ ;\ 100]$ par

$$f(x) = -50\ln(x) + 2x + 160$$

où x représente le nombre de jours écoulés depuis la mise en place de la méthode de régulation.

À l'aide de la partie A :

1. Déterminons la période de temps pour laquelle le nombre d'animaux nuisibles est inférieur ou égal à 60. Nous avons vu dans la partie A que $f(x) = 60$ pour $x = 12$ et que la fonction était strictement décroissante sur $]0\,;25[$

   par conséquent pour tout $x \in [12\,;\,25[,\ f(x) \leqslant 60$

   Nous avons vu dans la partie A que $f(x) = 60$ aussi pour $x = 45$ et que la fonction était strictement croissante sur $]25\,;45]$.

   Par conséquent pour tout $x \in]25\,;\,45],\ f(x) \leqslant 60$. $f(25) \leqslant 60$.

   Il en résulte que la période de temps pour laquelle le nombre d'animaux nuisibles est inférieur ou égal à 60 est $[12\,;45]$

2. Cette méthode semble efficace pour aider à prendre la décision de l'appliquer la saison prochaine puisque 12 jours suffiront à obtenir ce résultat, mais après 45 jours la situation ne sera plus sous contrôle, l'effectif aura, à nouveau, dépassé 60.

EXERCICE 4 **3 points**

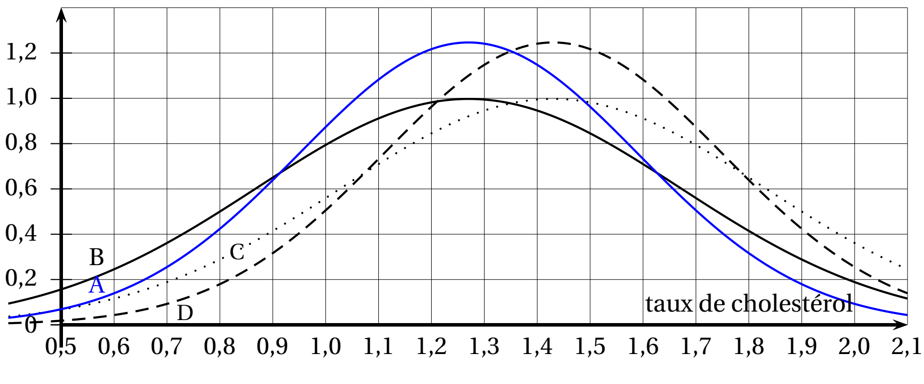
Cet exercice est un questionnaire à choix multiple dont les questions sont indépendantes les unes des autres. Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse inexacte ou l'absence de réponse n'enlève pas de points.

Vous ferez correspondre avec précision **sur votre copie** le numéro de la question traitée et la réponse donnée.

1. D'après le Bulletin épidémiologique hebdomadaire (BEH), près de 20 % des adultes en France ont un taux de « mauvais »cholestérol supérieur à la limite recommandée de 1,6 g/L de sang.

   Le taux de mauvais cholestérol d'un individu est une variable aléatoire X distribuée selon la loi normale de moyenne 1,27 g/L et d'écart type 0,4 g/L.

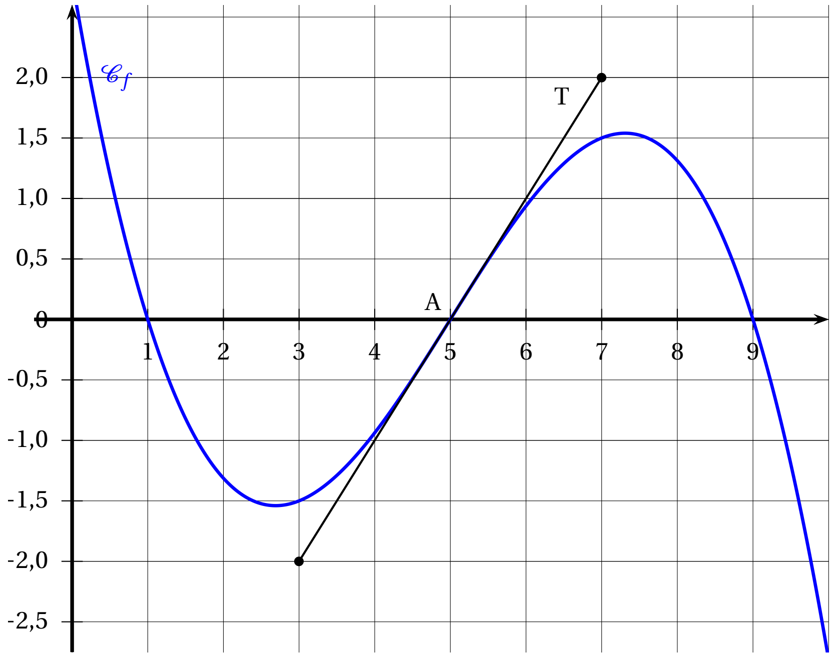
   On a représenté ci-dessous quatre courbes de Gauss dont l'une est associée à la variable aléatoire X et trois autres à des lois normales $\mathcal{N}(1,43\,;\,0,4)$, $\mathcal{N}(1,43\,;\,0,22)$ et $\mathcal{N}(1,27\,;\,0,22)$:



   Question : La courbe correspondant à la variable aléatoire X est :

   ~~A~~ $\boxed{\text{B}}$ ~~C~~ ~~D~~

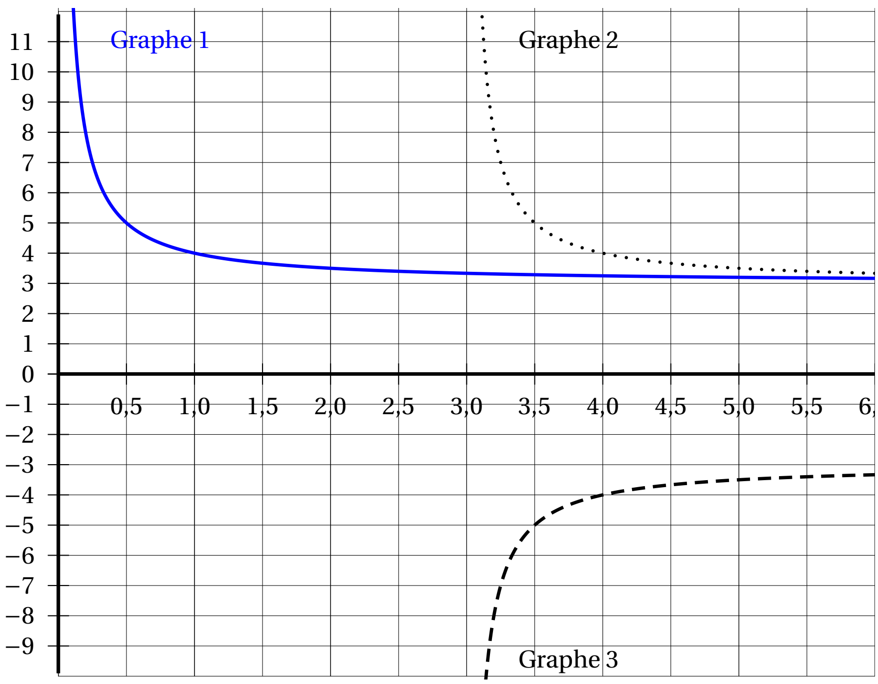
2. La courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet une tangente T au point A d'abscisse 5.



Question : La valeur de $f'(5)$ est égale à :

$\cancel{f'(5) = -1}$ $\qquad$ $\cancel{f'(5) = 0}$ $\qquad$ $f'(5) = 1$ $\qquad$ $\cancel{f'(5) = 2}$

3. g est une fonction définie sur $]3\,;\,+\infty[$ telle que $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} g(x) = +\infty$.

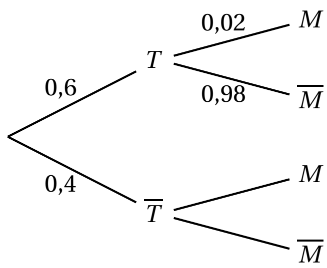


Question : Une courbe représentative pouvant correspondre à la fonction g est :

A. ~~Graphe 1~~ $\qquad$ **B.** $\boxed{\text{Graphe 2}}$ $\qquad$ **C.** ~~Graphe 3~~ $\qquad$ **D.** ~~au moins 2 graphes conviennent~~

ANNEXE A (à compléter, numéroter et à rendre avec la copie)

Exercice 1 :



Exercice 2 : On souhaite faire afficher la valeur de la voiture en 2018 à l'aide de cet algorithme :

Variables
    P réel ; i entier naturel
Initialisation
    P prend la valeur 10 500
Traitement
    Pour i allant de 1 à 7
        P prend la valeur $0,86P$
    Fin Pour
Sortie
Afficher P