Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant septembre 2007 correction

Exercice 1

Les parties A et B sont indépendantes

Dans tout l'exercice, les résultats numériques seront donnés sous forme décimale et arrondis à 10^{-4} près.

Un groupe de 150 personnes en séjours de ski est constitué de 60 % d'enfants et 40 % d'adultes. Chacun choisit le ski de fond ou le ski alpin. 80 % des adultes choisissent le ski alpin et autant d'enfants que d'adultes choisissent le ski de fond.

Partie A

1. Le tableau d'effectifs est complété dans le document donné.
2. On choisit une personne au hasard dans ce groupe.
   a. Déterminons la probabilité qu'elle fasse du ski alpin.
   L'univers est l'ensemble des 150 personnes en séjour de ski et la loi de probabilité mise sur cet univers est l'équiprobabilité. Par conséquent le probabilité d'un événement A est
   $p(A) = \dfrac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de l'univers}}$.
   Il y a 126 personnes faisant du ski alpin. L'univers a 150 éléments.
   En appelant A l'événement : « la personne fait du ski alpin ». $p(A) = \dfrac{126}{150} = 0{,}84$.
   b. Appelons E l'événement : « la personne est un enfant » et F l'événement : « la personne fait du ski de fond ». Sachant que cette personne est un enfant, déterminons la probabilité qu'elle fasse du ski de fond. Cette probabilité se note alors $p_E(F)$.
   $p_E(F) = \dfrac{p(E \cap F)}{p(E)} = \dfrac{\frac{12}{150}}{\frac{24}{150}} = 0{,}50$.

Partie B

La durée journalière, exprimée en heures, de pratique du ski de fond est une variable aléatoire X de la loi normale 4 et d'écart-type 0,5.
Pour répondre aux questions suivantes, on pourra utiliser la table de la loi normale centrée réduite.

Dire que la loi de probabilité de la variable X est la loi normale $\mathcal{N}(4\ ;\ 0{,}5)$ est équivalent à dire que la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-4}{0{,}5}$ est la loi normale centrée réduite. Déterminons les probabilités qu'un skieur de fond ait pratiqué dans la journée :

- **plus de** 5 **heures.** Cette probabilité est notée $p(X \geqslant 5)$. Ceci est équivalent à $p(Z \geqslant 2)$.
  $p(Z \geqslant 2) = 1 - p(Z \leqslant 2)$.
  Dans la table de la loi centrée réduite, nous pouvons lire $p(Z \leqslant 2) = 0{,}9772$.
  Il en résulte $p(Z \geqslant 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$.
  La probabilité qu'un skieur de ski de fond ait pratiqué plus de cinq heures est 0,0228.
- **moins de** 3,5 **heures** Cette probabilité est notée $p(X \leqslant 3{,}5)$. Elle est équivalente à $p(Z \leqslant -1)$
  $p(Z \leqslant -1) = 1 - p(Z \leqslant 1)$. Dans la table de la loi centrée réduite, nous pouvons lire $p(Z \leqslant 1) = 0{,}8413$.
  Il en résulte $p(Z \leqslant -1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$.
  La probabilité qu'un skieur de ski de fond ait pratiqué moins de trois heures et demie est 0,1587.
- **entre** 3 **et** 5 **heures** Cette probabilité est notée $p(3 \leqslant X \leqslant 5)$. Elle est équivalente à $p(-2 \leqslant Z \leqslant 2)$.
  $p(-2 \leqslant Z \leqslant 2) = p(Z \leqslant 2) - (1 - p(Z \leqslant 2)) = 2(p(Z \leqslant 2)) - 1 = 2 \times 0{,}9772 - 1 = 0{,}9544$.
  La probabilité qu'un skieur de ski de fond ait pratiqué entre trois et cinq heures est 0,9544.

Exercice 2

La courbe $\left(\mathscr{C}_g\right)$ donnée dans le document représente, dans un repère orthonormé, une fonction g définie sur $\text{I} = \left[0~;~\dfrac{\pi}{2}\right]$ par :

$$g(x) = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right).$$

1. Par **lecture graphique**, répondre aux questions suivantes en expliquant par une phrase la démarche adoptée :
   - **a.** Résolvons dans I l'équation : $g(x) = 0$. Nous lisons l'abscisse du point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses. La solution est $\dfrac{\pi}{3}$.
   - **b.** Déterminons le signe de $g(x)$. Pour déterminer le signe de $g(x)$, nous déterminons la position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses, au dessus la fonction est positive.
     Pour $x \in \left[0~;~\dfrac{\pi}{3}\right[$, $g(x) > 0$ et pour $x \in \left]\dfrac{\pi}{3}~;~\dfrac{\pi}{2}\right]$, $g(x) < 0$.
2. Soit G la fonction définie sur I par : $G(x) = \dfrac{1}{2}\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.
   - **a.** Montrons que G est une primitive de g sur I.
     G est une primitive de g sur I si pour tout $x \in I$, $G'(x) = g(x)$.
     $G'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = g(x)$.
     Il en résulte que G est une primitive de g sur I.
   - **b.** Soit D le domaine plan limité par la courbe $\left(\mathscr{C}_g\right)$, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = \dfrac{\pi}{4}$ et $x = \dfrac{\pi}{3}$. Calculons, en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire du domaine D.
     Pour tout x appartenant à $\left[\frac{\pi}{4}~;~\frac{\pi}{3}\right]$, $g(x) \geqslant 0$, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{\pi}{3}$ est en unités d'aire $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} g(x)\,\text{d}x$.

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} g(x)\,\text{d}x = \Big[G(x)\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\\
\mathscr{A} &= G\left(\dfrac{\pi}{3}\right) - G\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\\
&= \dfrac{1}{2}\sin\left(2 \times \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6}\right) - \dfrac{1}{2}\sin\left(2 \times \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}\right)\\
&= \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6}\right) - \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right)\\
&= \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\\
&= \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

     L'aire de D vaut $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}$u.a.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]0~;~5]$ par : $f(x) = -2\ln x + \ln(6 - x) - 1$
et $\left(\mathscr{C}_f\right)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminons la limite de f en 0.
   $\displaystyle\lim_{x\to 0} -2\ln x + \ln(6 - x) - 1 = \lim_{x\to 0} -2\ln x + \lim_{x\to 0} \ln 6 - 1 = +\infty$
   La courbe est asymptote à l'axe des ordonnées au voisinage de 0.
2. Soit f' la fonction dérivée de f sur $]0~;~5]$;

a. Calculons $f'(x)$. $f'(x) = -2 \times \dfrac{1}{x} + \dfrac{-1}{6-x} = \dfrac{-2(6-x)-x}{x(6-x)} = \dfrac{x-12}{x(6-x)}$

Nous trouvons bien $f'(x) = \dfrac{x-12}{x(6-x)}$.

b. Étudions le signe de $f'(x)$ pour tout x de $]0\,;\,5]$.

Pour tout $x \in]0\,;\,5[$, $x > 0$; $x - 12 < 0$; $6 - x > 0$. Par conséquent, le dénominateur étant toujours strictement positif $f'(x)$ est du signe de $x - 12$ c'est-à-dire strictement négatif .

Étudions maintenant le sens de variation de f

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Sur $]0\,;\,5]$, $f'(x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.

dressons le tableau de variations de f sur $]0\,;\,5]$. Auparavant calculons $f(5)$.

$f(5) = -2\ln 5 + \ln(6-5) - 1 = -2\ln 5 - 1$

x	0		5
f'		$-$	
Variation de f	$+\infty$	$\searrow$	$-2\ln 5 - 1$

3. Complétons le tableau de valeurs suivant :

x	0,5	1	2	3	4	5
$f(x)$	2,1	0,6	-1	$-2{,}1$	$-3{,}1$	$-4{,}2$

Les valeurs sont arrondies à 10^{-1} près.

4. Déterminons une équation de la tangente (T) à $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au point d'abscisse 2.

Une équation de la tangente au point d'abscisse a à la courbe représentative de f est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

$f(2) = -2\ln 2 + \ln 4 - 1 = -2\ln 2 + 2\ln 2 - 1 = -1 \qquad f'(2) = \dfrac{2-12}{2(6-2)} = -\dfrac{5}{4}$

$y = -\dfrac{5}{4}(x-2) - 1 = -\dfrac{5}{4}x + \dfrac{3}{2}$.

Une équation de la tangente (T) à $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au point d'abscisse 2 est $y = -\dfrac{5}{4}x + \dfrac{3}{2}$.

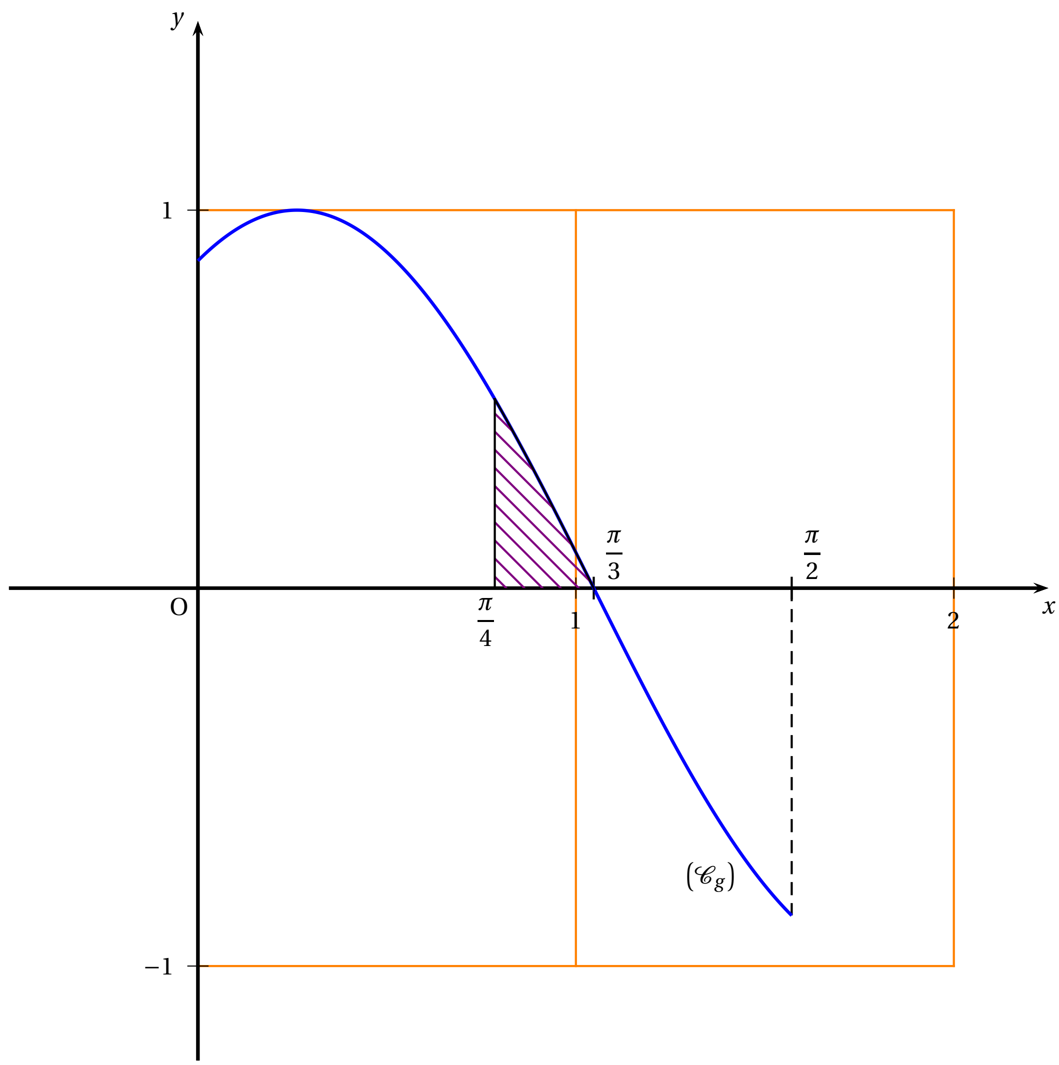
5. Traçons la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ représentative de f et sa tangente (T) dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

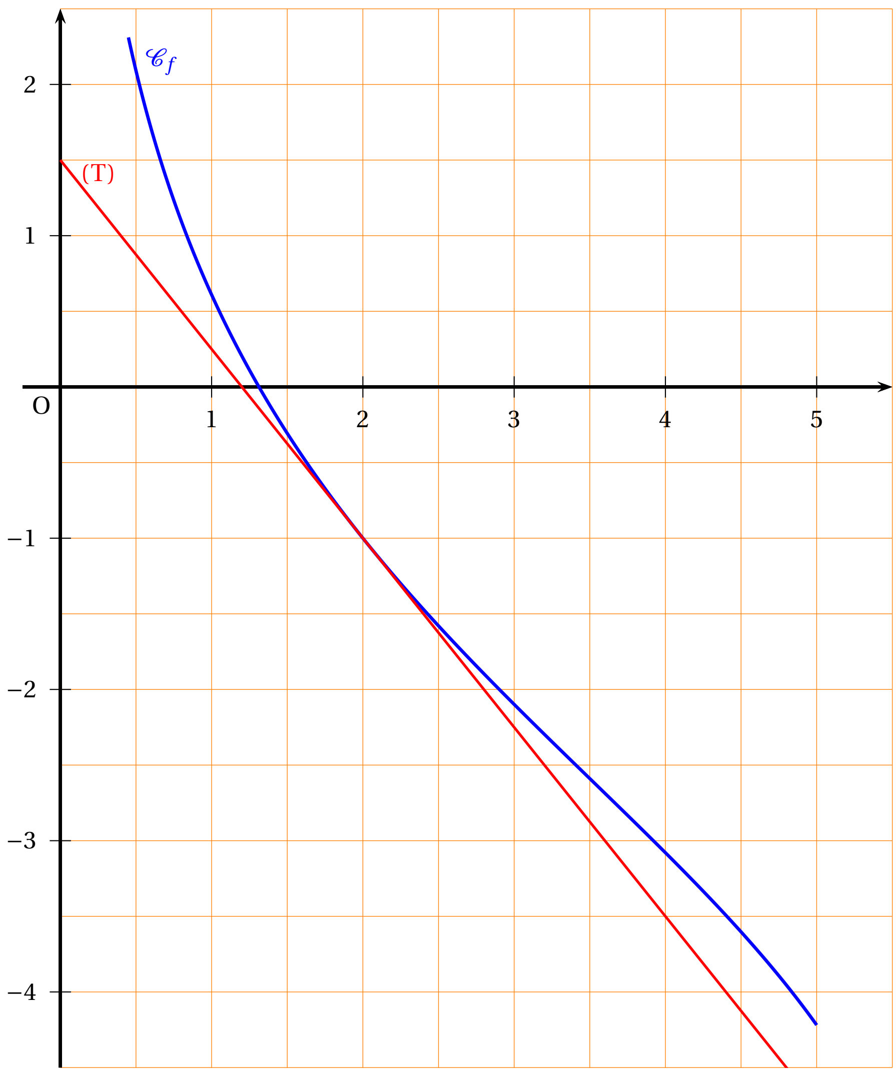
Documents des exercices 1 et 2

1. Tableau d'effectifs de l'exercice 1

	ski alpin	ski de fond	total
enfants	78	12	90
adultes	48	12	60
total	126	24	150

2. Courbe $(\mathscr{C}_g)$ de l'exercice 2





$\mathscr{C}_f$
(T)
2
1
O
1
2
3
4
5
−1
−2
−3
−4