

Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant
Métropole-Antilles-Guyane-La Réunion septembre 2014
Correction

La calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1

4 points

Un site Internet permet aux particuliers de vendre ou d'acheter des objets.

Le vendeur propose un objet à un prix de vente initial en mettant une annonce en ligne sur ce site.

Pendant deux semaines, au fur et à mesure des offres des internautes intéressés, le prix affiché de l'objet augmente pour atteindre son prix final.

À la fin de cette période, l'internaute qui a fait l'offre la plus élevée achète l'objet au prix final.

Si une annonce reçoit une offre, alors la vente de l'objet est obligatoire au prix final même si le vendeur le juge trop bas.

Sur ce site, une étude statistique a montré que :

- 60 % des annonces reçoivent une première offre dès la première semaine ; dans ce cas, 75 % des vendeurs sont satisfaits du prix final ;
- 30 % des annonces reçoivent une première offre seulement en deuxième semaine ; dans ce cas, 57 % des vendeurs sont satisfaits du prix final ;
- les autres annonces ne reçoivent aucune offre durant ces deux semaines et le vendeur retire alors son objet de la vente.

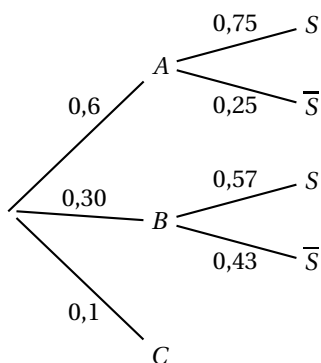
Une annonce est mise en ligne sur ce site.

On note A , B , C et S les événements suivants :

- A : « l'annonce reçoit une première offre dès la première semaine » ;
- B : « l'annonce reçoit une première offre seulement en deuxième semaine » ;
- C : « l'annonce ne reçoit aucune offre » ;
- S : « le vendeur est satisfait du prix final ».

Les probabilités seront exprimées sous forme décimale, arrondies à 10^{-3} près si nécessaire.

1. Complétons l'arbre de probabilité correspondant à la situation.



2. Calculons $P(A \cap S)$. $P(A \cap S) = P(A) \times P_A(S) = 0,6 \times 0,75 = 0,45$

3. Montrons que la probabilité que le vendeur soit satisfait du prix final est de 0,621.

$$P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S) = 0,45 + 0,3 \times 0,57 = 0,45 + 0,171 = 0,621.$$

Nous obtenons bien le résultat attendu.

4. La probabilité qu'un objet ait reçu une première offre dès la première semaine, sachant que le vendeur est satisfait du prix final est notée $P_S(A)$.

$$P_S(A) = \frac{P(S \cap A)}{P(S)} = \frac{0,45}{0,621} \approx 0,725.$$

EXERCICE 2

5 points

Les réponses au QCM sont effectuées sur l'**annexe B (à rendre avec la copie)**.

Pour chaque question, une seule réponse est exacte.

Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'enlève et n'ajoute pas de point. Si le total des points est négatif, la note attribuée à cet exercice sera zéro.

EXERCICE 3

11 points

On considère la fonction f définie sur $] -3 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + x + 2\ln(x+3).$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminons la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x + 2 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\ln(x+3) = +\infty.$$

2. Déterminons la limite de f en -3 .

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -3} x^2 + x + 2 = 8 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -3} 2\ln(x+3) = -\infty$$

Par conséquent la droite d'équation $x = -3$ est une asymptote à la courbe \mathcal{C}_f

3. Déterminons $f'(x)$. $f'(x) = 2x + 1 + 2\left(\frac{1}{x+3}\right)$.

$$\text{En réduisant au même dénominateur, nous obtenons } f'(x) = \frac{(2x+1)(x+3)+2}{x+3} = \frac{2x^2+7x+5}{x+3}.$$

Par conséquent $f'(x) = \frac{2x^2+7x+5}{x+3}$ pour tout x de $] -3 ; +\infty[$.

4. a. Étudions le signe de $2x^2 + 7x + 5$ pour tout x de $] -3 ; +\infty[$.

$$\text{Calculons } \Delta. \Delta = 7^2 - 4 \times 2 \times 5 = 9$$

$$\Delta > 0 \text{ le trinôme admet deux racines : } x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$x_1 = \frac{-7-3}{4} = \frac{-5}{2} \quad x_2 = \frac{-7+3}{4} = -1.$$

Le trinôme peut se factoriser en $2\left(x + \frac{5}{2}\right)(x+1)$

Déterminons le signe de ce trinôme.

x	-3	$-\frac{5}{2}$	-1	$+\infty$
$x + \frac{5}{2}$		$-$	0	$+$
$x + 1$	$-$		$-$	0
$2x^2 + 7x + 5$	$+$	0	$-$	0

- b. Déterminons le signe de $f'(x)$ pour tout x de $] -3 ; +\infty[$.

Puisque x appartient à l'intervalle $] -3 ; +\infty[$, $x+3$ est strictement positif.

Par conséquent le signe de $f'(x)$ est celui de $2x^2 + 7x + 5$.

Si $x \in] -3 ; -\frac{5}{2}[$ ou si $x \in] -1 ; +\infty[$ alors $f'(x) > 0$ et si $x \in] \frac{5}{2} ; -1[$ alors $f'(x) < 0$.

- c. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I .

Sur $] -3 ; -\frac{5}{2}[$ ou sur $x \in] -1 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur chacun de ces intervalles.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I .

Sur $] \frac{5}{2} ; -1[$, $f'(x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.

Dressons le tableau de variations de f sur $] -3 ; +\infty[$.

x	-3	$-\frac{5}{2}$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
			0	$+$
f	$-\infty$	$\frac{15}{4} - 2\ln 2$	$2\ln 2$	$+\infty$

$$f\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4} - \frac{5}{2} + 2\ln\left(-\frac{5}{2} + 3\right) = \frac{15}{4} - 2\ln(2).$$

$$f(-1) = 1 - 1 + 2\ln(-1+3) = 2\ln(2).$$

5. Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a). \quad f(0) = 2\ln(3) \quad f'(0) = \frac{5}{3}$$

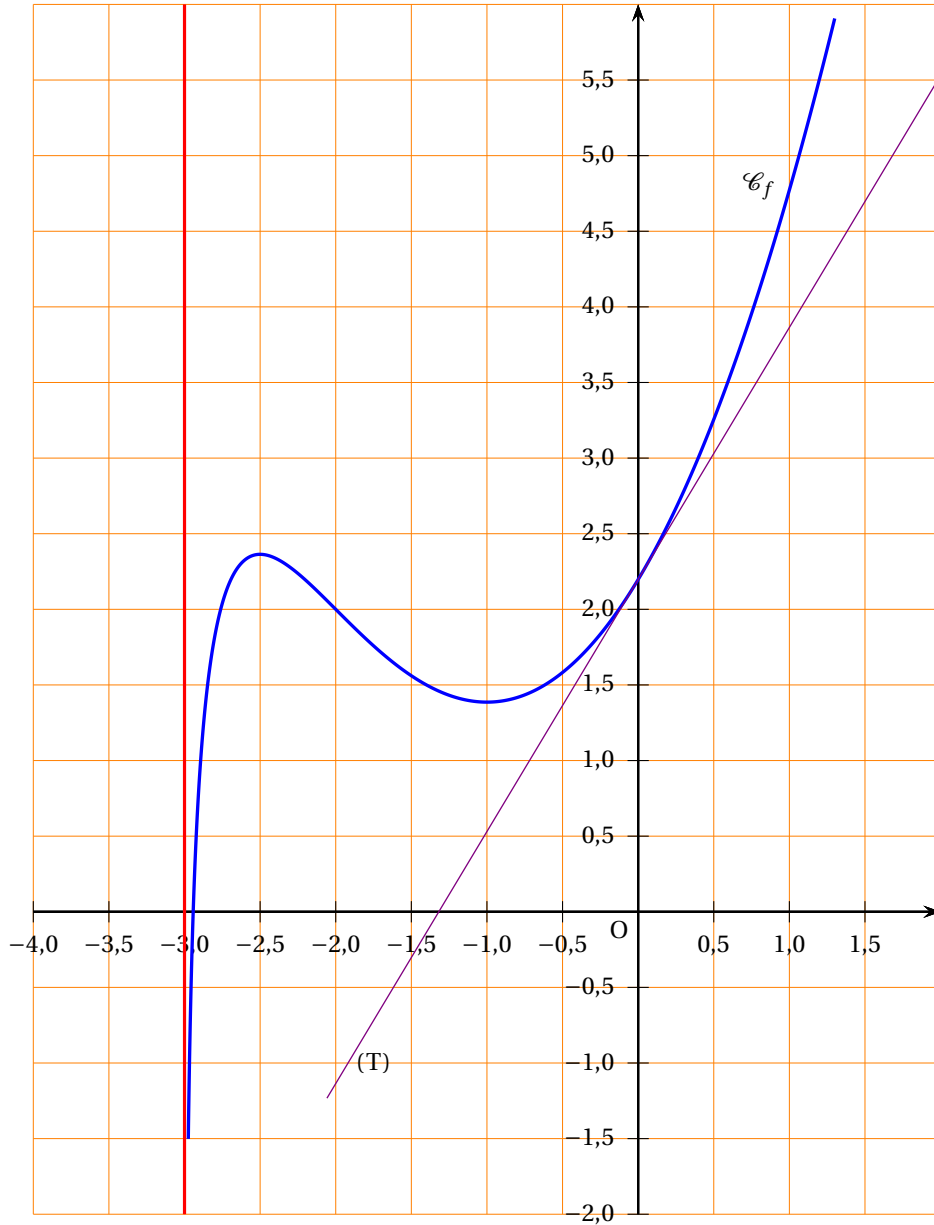
Une équation de la tangente (T) à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0 est $y = \frac{5}{3}x + 2\ln(3)$.

6. Complétons ci-dessous le tableau de valeurs donné.

x	-2,8	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1
$f(x)$	1,8	2,4	2	1,6	1,4	1,6	2,2	3,3	4,8

Les résultats sont arrondis au dixième près

7. La tangente (T), la courbe \mathcal{C}_f et l'asymptote sont construites ci-dessous.



ANNEXE B (à compléter et à rendre avec la copie)

Cochons pour chaque question posée, la réponse qui convient. Aucune justification n'est demandée.

1. Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = 0,2$.

La probabilité $P(X = 3)$, arrondie à 10^{-3} près, est :

- 0,028 0,115 0,003

2. Soit Y une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$P(Y = k)$	0,26	0,37	0,18	0,19

L'espérance mathématique de la variable aléatoire Y est :

- 1,3 0,25 1,5

3. Soient deux évènements A et B tels que $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,4$ et $P(A \cap B) = 0,1$.

- A et B sont indépendants A et B ne sont pas indépendants A et B sont incompatibles.

4. Une primitive de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{3x} - 2x^2 + 1$ est :

- $F(x) = 3e^{3x} - 4x$ $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}x^3 + x + 3$ $F(x) = e^{3x} - \frac{2}{3}x^3 + x$

5. La valeur de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ est :

- 0 1 2