Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant
Métropole–La Réunion septembre 2020

EXERCICE 1 **6 points**

Partie A

En 2018, il y a eu 2 560 participants à l'UTMB, Ultra Trail du Mont Blanc, dont 270 femmes. Les coureurs sont classés selon leur catégorie : espoir, senior ou vétéran.

On sait que

- 11/16 des participants sont classés dans la catégorie vétéran.
- 687 des coureurs sont des hommes seniors.
- Aucune femme espoir n'a participé à la course.
- Il y a 66 femmes vétérans de plus que de femmes seniors.

1.
- Il y a 270 femmes, ce qui fait $2560 - 270 = 2290$ hommes.
- 11/16 des participants sont classés dans la catégorie vétéran, ce qui en fait $\dfrac{11}{16} \times 2560 = 1760$.
- On place 687 hommes seniors, et 0 femme espoir.
- Il y a 66 femmes vétérans de plus que de femmes seniors et la somme de ces deux catégories est 270. Si on appelle x le nombre de femmes seniors, on a $2x + 66 = 270$. Il y a donc 102 femmes seniors et 168 femmes vétérans.

On complète alors le tableau d'effectifs par soustractions :

Sexe \ Catégorie	Espoir	senior	Vétéran	Total
Homme	11	687	1 592	2 290
Femme	0	102	168	270
Total	11	789	1 760	2 560

2. **a.** 2 290 hommes ont participé à la course, dont 687 seniors.
Le pourcentage de seniors chez les hommes est donc $\dfrac{687}{2290} \times 100 = 30$.

b. 270 femmes ont participé à la course, dont 102 seniors.
Le pourcentage de seniors chez les femmes est donc $\dfrac{102}{270} \times 100 \approx 37,8$.

3. On choisit une personne participant à l'UTMB au hasard; on appelle S l'évènement « être dans la catégorie senior » et F l'évènement « être une femme ».
On veut déterminer s'il y a dépendance ou indépendance entre les évènements « être dans la catégorie senior » et « être une femme ».
$P(S \cap F) = \dfrac{102}{2560} \approx 0,040$; $P(S) = \dfrac{789}{2560} \approx 0,308$ et $P(F) = \dfrac{270}{2560} \approx 0,105$
$P(S) \times P(F) \approx 0,033 \neq 0,040$ donc $P(S) \times P(F) \neq P(S \cap F)$ donc les deux évènements S et F ne sont pas indépendants.

Partie B

Une étude portant sur un échantillon de 200 coureurs inscrits cette année à l'UTMB montre que 130 d'entre entre eux n'ont jamais eu de blessure.

1. La fréquence f, dans cet échantillon, des coureurs qui n'ont jamais eu de blessure est : $f = \dfrac{130}{200} = 0,65$.

2. On détermine un intervalle de confiance à 95 % de la proportion p des coureurs qui n'ont jamais eu de blessure :

$$I_C = \left[f - 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\ ;\ f + 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right] = \left[0,65 - 1,96\sqrt{\frac{0,65 \times 0,35}{200}}\ ;\ 0,65 + 1,96\sqrt{\frac{0,65 \times 0,35}{200}}\right]$$
$$\approx [0,61\ ;\ 0,69]$$

3. Cédric a eu l'information que trois quarts des participants n'ont jamais eu de blessure aux précédentes éditions de l'UTMB.

Une proportion de trois quarts correspond à 0,75 qui n'appartient pas à l'intervalle de confiance. Donc au seuil de risque 5 %, il ne semble pas possible que l'on ait la même proportion cette année sur l'ensemble des inscrits.

Exercice 2 — 5 points

En 2020, la production annuelle moyenne de lait chez un éleveur est de 119 litres par brebis.

Il souhaite augmenter sa production moyenne pour atteindre 200 litres par brebis. Pour cela, il effectue des aménagements dans la bergerie. Il espère que sa production annuelle moyenne de lait va augmenter de 10 % par an. (*Source* : https ://bioreferences.bioetclic.org)

On note u_n la production annuelle moyenne par brebis attendue, en litres, l'année $2020 + n$.

1. $u_1 = u_0 + u_0 \times \dfrac{10}{100} = 119 + 119 \times \dfrac{10}{100} = 130,9$ et $u_2 = u_1 + u_1 \times \dfrac{10}{100} = 130,9 + 130,9 \times \dfrac{10}{100} = 143,99$

On peut estimer que la production moyenne par brebis sera, en litres, de 130,9 en 2021, et d'environ 144 en 2022.

2. **a.** Ajouter 10 %, c'est multiplier par $1 + \dfrac{10}{100}$, soit 1,1 ; donc pour tout n, $u_{n+1} = 1,1u_n$.

La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1,1$ et de premier terme $u_0 = 119$.

b. On en déduit que pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n$ donc $u_n = 119 \times 1,1^n$.

3. Afin d'estimer le nombre d'années nécessaires pour obtenir une production annuelle moyenne de lait supérieure à 200 litres par brebis, on propose les trois algorithmes ci-dessous.

Parmi les trois algorithmes suivants, on cherche celui qui permet d'afficher la réponse au problème posé.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
U réel N entier U prend la valeur 119 N prend la valeur 0 Tant que U < 200 faire U prend la valeur 1,1 × U Fin tant que N prend la valeur N+1 Afficher N	U réel N entier U prend la valeur 119 N prend la valeur 0 Tant que U < 200 faire U prend la valeur 1,1 × U N prend la valeur N+1 Fin tant que Afficher N	U réel N entier U prend la valeur 119 N prend la valeur 0 Tant que U < 200 faire U prend la valeur 1,1 × U N prend la valeur N+1 Fin tant que Afficher U

- On cherche un nombre d'années, donc il faut afficher la variable N ; on peut donc éliminer l'algorithme 3.
- Le compteur d'années N doit être augmenté de 1 à chaque tour de boucle, donc l'instruction « N prend la valeur N+1 » doit être à l'intérieur de la boucle « Tant que » ; on peut donc éliminer l'algorithme 1.

L'algorithme cherché est le 2.

4. À la calculatrice, on trouve $u_5 = 119 \times 1,1^5 \approx 192 < 200$ et $u_6 = 119 \times 1,1^6 \approx 211 \geqslant 200$.

C'est donc à partir de $n = 6$ qui correspond à l'année 2026 que l'éleveur atteindra son objectif.

EXERCICE 3 **5 points**

On s'intéresse à une population de tortues dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.

L'évolution de cette population, en fonction du temps, peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 332\,\text{e}^{-0,261x}$$

où x représente le nombre d'années écoulées à partir du début de l'année 2020 et $f(x)$ le nombre de tortues.

1. L'année 2020 correspond à $x = 0$, donc le nombre de tortues au début de l'année 2020 est $f(0) = 332$.
L'année 2021 correspond à $x = 1$, donc le nombre de tortues au début de l'année 2021 est $f(1) \approx 255$.

2. D'après le cours, $\displaystyle\lim_{X\to-\infty} \text{e}^{X} = 0$. Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -0,261x = -\infty$.
Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{e}^{-0,261x} = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3. La dérivée de la fonction $x \longmapsto \text{e}^{u(x)}$ est $x \longmapsto u'(x)\,\text{e}^{u(x)}$ donc la dérivée f' de la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f'(x) = 332 \times (-0,261)\,\text{e}^{-0,261x}$ soit $f'(x) = -86,652\,\text{e}^{-0,261x}$.

4. Pour tout réel X, $\text{e}^{X} > 0$ donc pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $\text{e}^{-0,261x} > 0$ donc $f'(x) < 0$.
On en déduit le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	332	$\searrow$	0

5. À partir de 2020, le nombre de tortues va décroitre régulièrement et tendre vers 0.

6. Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est vouée à l'extinction.
À l'aide de la calculatrice, et par essais successifs, on trouve $f(9) \approx 31 > 30$ et $f(10) \approx 24 < 30$; donc à partir de $2020 + 10$ soit 2030; le nombre de tortues sera inférieur au seuil critique.

EXERCICE 4 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque proposition, une seule réponse est exacte.

On cocher, pour chaque proposition, la réponse qui convient.

1. La taille en centimètres d'une femme en France est une variable aléatoire X distribuée selon la loi normale de moyenne $\mu = 163$.
95 % des femmes ont une taille comprise entre 152 cm et 174 cm.
L'écart-type de la variable aléatoire, arrondi à 10^{-1} est :

☒ 5,5 ☐ 3,7 ☐ 11 ☐ 6

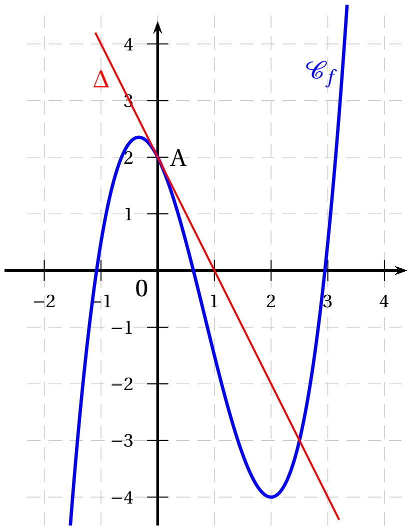
> D'après le cours, on sait que si une variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres μ et σ, $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$.
> D'après le texte, on sait que $P(152 \leqslant X \leqslant 174) \approx 0,95$ autrement dit $P(163 - 11 \leqslant X \leqslant 163 + 11) \approx 0,95$ ou encore $P(\mu - 11 \leqslant X \leqslant \mu + 11) \approx 0,95$.
> On peut donc estimer que $2\sigma \approx 11$ donc que $\sigma \approx 5,5$.

2. Dans une station de ski, on a constaté que la probabilité qu'il neige un jour donné est 0,6. La station de ski est ouverte 100 jours par an. La probabilité qu'il neige au maximum 60 jours par an, arrondie à 10^{-4}, est :

☐ 0,5433 ☐ 0,0812 ☒ 0,5379 ☐ 0,4621

> La variable aléatoire X qui donne le nombre de jours où il neige, suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,6$.
> La probabilité qu'il neige au maximum 60 jours par an est $P(X \leqslant 60) \approx 0,5379$.

3.



$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f.
Δ est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point au point A$(0~;~2)$

☐ $f'(0) = 2$ ☐ $f(2) = 0$ ☒ $f'(0) = -2$ ☐ $f(0) = -2$.

La tangente Δ passe par le point A $(0~;~2)$ et le point de coordonnées $(1~;~0)$.
Le coefficient directeur de cette tangente est d'une part $f'(0)$, et d'autre part, $\dfrac{0-2}{1-0} = -2$.
Donc $f'(0) = -2$.

4. Soit f la fonction définie sur $]2~;~+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x-5}{x-2}$. Une primitive F de f sur $]2~;~+\infty[$ est :

☐ $F(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2}$ ☒ $F(x) = \ln(x-2) + 3x - 5$

☐ $F(x) = \ln(x-2) + \dfrac{3}{2}x^2 - 5x$ ☐ une autre solution.

$f(x) = \dfrac{3x-5}{x-2} = \dfrac{3x-6+1}{x-2} = \dfrac{3(x-2)+1}{x-2} = 3 + \dfrac{1}{x-2}$ qui a pour primitive sur $]2~;~+\infty[$ la fonction F définie par $F(x) = \ln(x-2) + 3x + k$, où k est un réel quelconque.
En prenant $k = -5$, on peut dire que la fonction F définie par $F(x) = \ln(x-2) + 3x - 5$ est une primitive de la fonction f sur $]2~;~+\infty[$.