∽ Corrigé du baccalauréat Métropole 12 septembre 2013 ∾ Sciences et technologies du design et des arts appliqués

EXERCICE 1 **5 points**

1. Réponse **c.**

2. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 2 - 1 - 6 = -5$
   Réponse **b.**

3. Réponse **c.** : $x^{0,2} = 4 \iff \text{e}^{0,2\ln x} = 4 \iff 0,2\ln x = \ln 4 \iff \ln x = \dfrac{\ln 4}{0,2} \iff$
   $x = \text{e}^{\frac{2\ln 2}{0,2}} \iff x = \text{e}^{10\ln 2} \iff x = \text{e}^{\ln 2^{10}} = 2^{10} = 2^{2\times 5} = \left(2^2\right)^5 = 4^5$.
   Vérification : $\left(4^5\right)^{0,2} = 4^{\left(5\times\frac{1}{5}\right)} = 4^1 = 4$.

4. Réponse **b.**

5. Réponse **c.**

EXERCICE 2 **9 points**

Partie A :

1. **a.** On a $f(0) = 0$ c'est-à-dire $a \times 0 + b \times 0 + c = 0$, donc $c = 0$.
   b. On a de même $\left\{\begin{array}{l c l} f(1) & = & 1 \\ f(2) & = & 0 \end{array}\right.$ c'est-à-dire :
   $\left\{\begin{array}{l c l} a+b & = & 1 \\ 4a+2b & = & 0 \end{array}\right.$

2. Le système précédent peut s'écrire : $\left\{\begin{array}{l c l} 4a+4b & = & 4 \\ 4a+2b & = & 0 \end{array}\right.$ et donc par différence membres à membres :
   $2b = 4$ d'où $b = 2$.
   Or a = 1 - 2 = - 1.

On a donc $f(x) = -x^2 + 2x$.

Partie B :

1. $f'(x) = -2x + 2 = 2(1 - x)$
2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B est égal au nombre dérivé $f'(2)$ (2 abscisse de B), soit $f'(2) = 2(1-2) = 2 \times (-1) = -2$.
   À partir de B on se déplace de 1 en abscisse et de -2 en ordonnée (ou 2 et -4, ou 3 et -6).

Partie C :

1. $g(2) = 2 \times 2^3 - 14 \times 2^2 + 30 \times 2 - 20 = 16 - 56 + 60 - 20 = 76 - 76 = 0$.
   Or B(2 ; 0), donc B appartient à $\mathcal{C}_g$.
2. $g'(x) = 3 \times 2x^2 - 2 \times 14x + 30 = 6x^2 - 28x + 30$.

3. $g'(2) = 6 \times 2^2 - 28 \times 2 + 30 = 24 - 56 + 30 = 54 - 56 = -2 = f'(2)$.
   Les deux fonctions f et g ont le même nombre dérivé en 2 et leurs représentations graphiques contiennent toutes deux le point B : elles ont donc la même tangente en B.
4. $g(3) = 2 \times 3^3 - 14 \times 3^2 + 30 \times 3 - 20 = 54 - 126 + 90 - 20 = 144 - 146 = -2$.
   $g'(3) = 6 \times 3^2 - 28 \times 3 + 30 = 54 - 84 + 30 = 0$. Cela signifie que le nombre dérivé en 3 abscisse du point C de $\mathscr{C}_g$ est nul : la tangente en C à $\mathscr{C}_g$ est donc horizontale.
   Voir la figure

Partie D :

1. On a $g'(x) = 6x^2 - 28x + 30$.
   Ce trinôme a le même signe que le trinôme $3x^2 - 14x + 15$.
   Calculons ses racines : $\Delta = 14^2 - 4 \times 3 \times 15 = 196 - 180 = 16 = 4^2$.
   Les racines sont donc $x_1 = \dfrac{14+4}{2 \times 3} = \dfrac{18}{6} = 3$ et $x_2 = \dfrac{14-4}{2 \times 3} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$.
   Or $\dfrac{5}{3} < \dfrac{6}{3} = 2$.
   On sait que le trinôme est du signe de $a = 3$, donc positif, sauf entre les racines $\dfrac{5}{3}$ et 3.
   Conclusion : sur $\left]\frac{5}{3}\,;\,3\right]$, $g'(x) < 0$.
   La fonction g est donc décroissante sur $\left]\frac{5}{3}\,;\,3\right]$.
   On a donc le tableau de variations suivant :

x	2		3
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	-2

2. Voir l'annexe.
3. Le motif du préambule est obtenu par symétrie des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ autour de l'axe des abscisses, puis par symétrie de la figure obtenue, autour de la droite d'équation $x = 3$.
4. La frise est obtenue par translation de vecteur $3\overrightarrow{\imath}$ de la figure obtenue à la question précédente.
5. Voir le graphique 2 à la fin.

Exercice 3 **6 points**

1. **a.** $x^2 + y^2 = 25$.
   b. $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}$ avec t réel.
2. **a.** $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{z^2}{100} = 1$ avec $z > 0$.
   b. $\begin{cases} x = 5\cos t \\ z = 10\sin t \end{cases}$ avec t réel.

3. Les points du cercle d'abscisses 2 sont tels que : $2^2 + y^2 = 25$ soit $y^2 = 21$ d'où $y = \sqrt{21}$ ou $y = -\sqrt{21}$.

La base contenue dans le plan $x\text{O}y$ a donc pour longueur $2\sqrt{21}$.

Le point commun au triangle et à la demi-ellipse a une abscisse de 2, son ordonnée z positive est telle que :

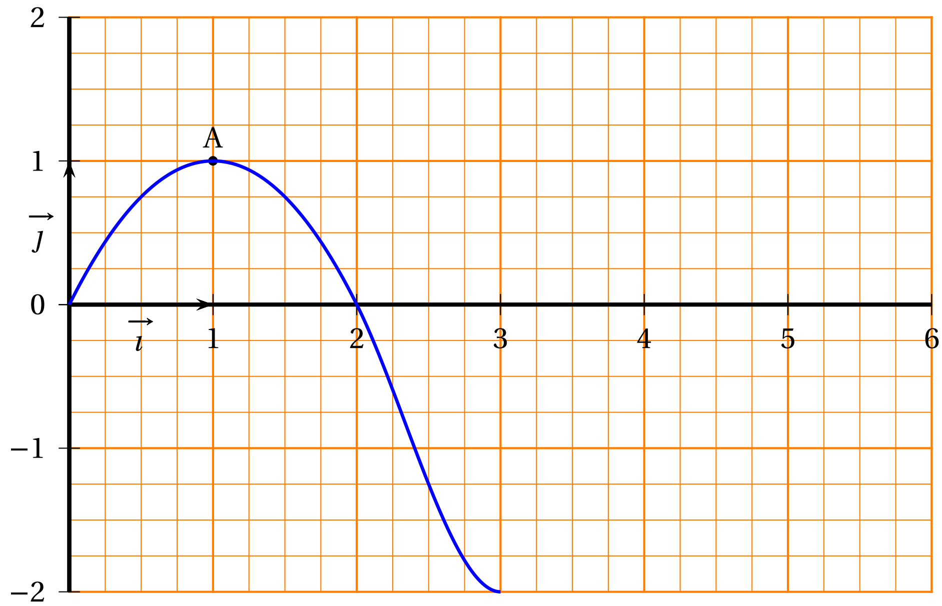
$\dfrac{2^2}{25} + \dfrac{z^2}{100} = 1$ soit $\dfrac{z^2}{100} = \dfrac{21}{25}$ ou encore$z^2 = 4 \times 21$. Donc $z = 2\sqrt{21}$.

La base et la hauteur du triangle ont la même longueur.

On peut noter que l'aire de ce triangle est $\dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{21} \times 2\sqrt{21} = 2 \times 21 = 42$, soit un entier.

ANNEXE 1 : (à remettre avec votre copie)

Graphique 1



Graphique 2