Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI2D/STL spécialité SPCL
Nouvelle-Calédonie 28 novembre 2017

Exercice 1 **4 points**

1. Une primitive de f définie pour $x > 0$ par $f(x) = 3x + \dfrac{2}{x}$ est la fonction F telle que :

   a. $F(x) = 3x^2 + \ln\left(x^2\right)$ **b.** $\boxed{F(x) = \dfrac{3x^2}{2} + 2\ln(x)}$ **c.** $F(x) = 3 - \dfrac{2}{x^2}$ **d.** $F(x) = 6x - 2\ln(x)$

   Si $F(x) = \dfrac{3x^2}{2} + 2\ln(x)$, alors $F'(x) = \dfrac{3}{2} \times 2x + 2 \times \dfrac{1}{x} = 3x + \dfrac{2}{x}$.

2. $\ln(128)$ est égal à :

   a. $\ln(2) + \ln(7)$ **b.** $\boxed{7\ln(2)}$ **c.** $2\ln(14)$ **d.** $\ln(120) + \ln(8)$.

   $128 = 2^7$ donc $\ln(128) = \ln\left(2^7\right) = 7\ln(2)$

3. On considère le nombre complexe $z = 2\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. Le cube de z est égal à :

   a. $6\,\mathrm{i}$ **b.** $\boxed{-8}$ **c.** 8 **d.** $-8\,\mathrm{i}$

   $(z)^3 = \left(2\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^3 = (2)^3\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^3 = 8\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{3}\times 3} = 8\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\pi} = -8$

4. L'équation $\mathrm{e}^{2x} = 3$ admet comme solution dans $\mathbf{R}$:

   a. $\dfrac{3}{2}$ **b.** $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln(3)}$ **c.** $\dfrac{3}{2}\mathrm{e}$ **d.** $\ln(9)$

   $\mathrm{e}^{2x} = 3 \iff 2x = \ln(3) \iff x = \dfrac{1}{2}\ln(3)$

Exercice 2 **6 points**

Un kiosque numérique propose des magazines consultables sur tablette. Il avait 4 000 abonnés lors de son lancement. Une étude commerciale montre que chaque année le taux de réabonnement est voisin de 70 % et que le nombre de nouveaux abonnés est d'environ 6 000.

1. On calcule le nombre d'abonnés une année après le lancement :
   $4\,000 \times 70\,\% = 2\,800$ et $2\,800 + 6\,000 = 8\,800$.
2. On calcule le nombre d'abonnés deux années après le lancement :
   $8\,800 \times 70\,\% = 6\,160$ et $6\,160 + 6\,000 = 12\,160$.
3. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel. u est un réel.
Initialisation :	Affecter à u la valeur 4 000 Affecter à n la valeur 0
Traitement :	Tant que $n < 2$ u prend la valeur $\dfrac{7}{10}u + 6000$ n prend la valeur $n + 1$
Sortie :	Afficher u

   On sort de la boucle « Tant que » quand $n = 2$; il s'affiche donc 12 160 en sortie.

4. On modifie l'algorithme pour afficher le nombre d'années à partir duquel il y aura plus de 15 000 abonnés :

Variables :	n est un entier naturel. u est un réel.
Initialisation :	Affecter à u la valeur 4 000 Affecter à n la valeur 0
Traitement :	Tant que $u \leqslant 15000$ u prend la valeur $\dfrac{7}{10}u + 6000$ n prend la valeur $n+1$
Sortie :	Afficher n

5. Soit la suite (a_n) définie par : $a_0 = 4$ et pour tout $n \geqslant 0$, $a_{n+1} = \dfrac{7}{10}a_n + 6$.
Les termes de la suite (u_n) donnent le nombre de milliers d'abonnés après n années de lancement.

6. Soit (b_n) la suite définie pour tout entier n par : $b_n = 20 - a_n$.
On admet que la suite (b_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{7}{10}$.
$b_0 = 20 - a_0 = 20 - 4 = 16$
La suite (b_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{7}{10}$ et de premier terme $b_0 = 16$ donc, pour tout n, $b_0 = 16 \times \left(\dfrac{7}{10}\right)^n$.
Pour tout n, $b_n = 20 - a_n$, donc $a_n = 20 - b_n$ donc $a_n = 20 - 16 \times \left(\dfrac{7}{10}\right)^n$.

7. On dépasse 30000 abonnés si on peut trouver n tel que $u_n > 30$.
Mais $u_n = 20 - 16 \times \left(\dfrac{7}{10}\right)^n$ est inférieur à 20 car $16 \times \left(\dfrac{7}{10}\right)^n > 0$.
Donc on ne dépassera jamais 30000 abonnés.

EXERCICE 3 — 5 points

Marie a invité quelques amis pour le thé. Elle souhaite leur proposer ses macarons maison.
Elle les sort de son congélateur à -18 °C et les place dans une pièce à 20 °C.
Au bout de 15 minutes, la température des macarons est de 1 °C.

Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante : chaque minute la hausse de température des macarons est la même.
La température des macarons passe, en 15 minutes, de -18 °C à 1 °C, donc augmente de 19 °C.
En supposant que la vitesse de décongélation est constante, la température des macarons passerait à $1 + 19 = 20$ °C au bout de 30 minutes, et à $20 + 19 = 39$ °C au bout de 45 minutes.
Mais c'est impossible que la température des macarons soit supérieure à la température ambiante, donc le modèle n'est pas pertinent.

Deuxième modèle

On suppose maintenant que la vitesse de décongélation est proportionnelle à la différence de température entre les macarons et l'air ambiant (il s'agit de la loi de Newton).
On désigne par θ la température des macarons à l'instant t, et par θ' la vitesse de décongélation.
L'unité de temps est la minute et l'unité de température le degré Celsius.

On négligera la diminution de température de la pièce et on admettra donc qu'il existe un nombre réel a tel que, pour t positif : $\theta'(t) = a\left[\theta(t) - 20\right] \quad (E)$

1. $\theta'(t) = a\left[\theta(t) - 20\right] \iff \theta'(t) = a\theta(t) - 20a \iff \theta'(t) - a\theta(t) = -20a$ qui s'écrit $\theta' - a\theta = -20a$.
D'après le cours, l'équation différentielle $y' + ay = b$ (avec $a \neq 0$) a pour solutions les fonctions f définies par $f(t) = k\,\mathrm{e}^{-at} + \dfrac{b}{a}$ où k est un réel quelconque.
Donc l'équation différentielle $\theta' - a\theta = -20a$ a pour solutions les fonctions θ définies par $\theta(t) = k\,\mathrm{e}^{at} + 20$ où $k \in \mathbf{R}$.

On rappelle que la température des macarons à l'instant $t = 0$ est égale à -18 °C et que, au bout de 15 min, elle est de 1 °C.

2.
- On sait que $\theta(0) = -18$ donc $k\,\mathrm{e}^{0} + 20 = -18$ donc $k = -38$; on en déduit que $\theta(t) = 20 - 38\,\mathrm{e}^{at}$.
- On sait que $\theta(15) = 1$ donc $20 - 38\,\mathrm{e}^{15a} = 1$ ce qui équivaut à $\mathrm{e}^{15a} = \dfrac{-19}{-38}$ ou encore $\mathrm{e}^{15a} = \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire $15a = \ln\dfrac{1}{2}$ soit $15a = -\ln 2$; on en déduit que $a = -\dfrac{\ln 2}{15}$.

On a donc démontré que $\theta(t) = 20 - 38\,\mathrm{e}^{-\frac{t\ln 2}{15}}$.

3. La température idéale de dégustation des macarons étant de 15 °C, Marie estime que celle-ci sera atteinte au bout de 30 min.

Au bout de 30 minutes, la température sera de

$\theta(30) = 20 - 38\,\mathrm{e}^{-\frac{30\times\ln 2}{15}} = 20 - 38\,\mathrm{e}^{-2\ln 2} = 20 - \dfrac{38}{4} = 10{,}5$ °C. Donc Marie a tort.

Il faut chercher une température t pour laquelle $\theta(t) = 15$; on résout cette équation :

$$\theta(t) = 15 \iff 20 - 38\,\mathrm{e}^{-\frac{t\ln 2}{15}} = 15 \iff 5 = 38\,\mathrm{e}^{-\frac{t\ln 2}{15}} \iff \frac{5}{38} = \mathrm{e}^{-\frac{t\ln 2}{15}} \iff \ln\left(\frac{5}{38}\right) = -\frac{t\ln 2}{15}$$

$$\iff \frac{\ln\left(\frac{5}{38}\right)}{-\frac{\ln 2}{15}} = t$$

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{5}{38}\right)}{-\frac{\ln 2}{15}} \approx 43{,}9$ donc il faudra attendre environ 44 minutes.

EXERCICE 4 — 5 points

Dans un élevage de poulets fermiers, les volailles sont commercialisées après 90 jours d'élevage. Un poulet de 90 jours sera dit conforme si sa masse est comprise entre 2,8 kg et 3,2 kg.

1. L'avicultrice a constaté que la masse M, exprimée en kg, de ses poulets de 90 jours suit une loi normale de moyenne $\mu = 3$ et d'écart type $\sigma = 0{,}1$.

a. La probabilité qu'un poulet de 90 jours prélevé au hasard soit conforme est, d'après le cours, $P\big(2{,}8 \leqslant M \leqslant 3{,}2\big) = P\big(3 - 2\times 0{,}1 \leqslant M \leqslant 3 + 2\times 0{,}1\big) = P\big(\mu - 2\sigma \leqslant M \leqslant \mu + 2\sigma\big) \approx 0{,}95$.

b. La probabilité que la masse d'un poulet de 90 jours prélevé au hasard soit supérieure à 3,3 kg est $P\big(M > 3{,}3\big) \approx 0{,}001$ (à la calculatrice).

2. On admet dans cette question que 95 % des poulets de 90 jours sont conformes donc la probabilité qu'un poulet soit non conforme est $p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$.

Un rôtisseur achète tous les samedis 100 de ces poulets. On admet que le nombre de poulets de l'élevage est suffisamment important pour que cet achat puisse être assimilé à un prélèvement avec remise.

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de poulets non conformes, c'est-à-dire dont la masse n'est pas dans l'intervalle $[2{,}8\,;\,3{,}2]$.

a. L'achat peut être assimilé à un prélèvement avec remise dans un lot de 100 poulets, avec une probabilité de non conformité égale à 0,05 ; donc on peut dire que la variable aléatoire X qui donne le nombre de poulets défectueux dans le lot de 100 suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}05$.

b. L'espérance mathématique de X est $np = 100 \times 0{,}05 = 5$; c'est le nombre moyen de poulets non conformes que l'on peut trouver dans un lot de 100 poulets.

3. Lors de son dernier achat, le rôtisseur a compté 9 poulets non conformes. Il se plaint auprès de l'éleveur.

Avec un tableur, on a calculé les probabilités $P(X \leqslant a)$ pour a allant de 0 à 13.

a	0	1	2	3	4	5	6
$P(X \leqslant a)$	0,005 9	0,037 1	0,118 3	0,257 8	0,436 0	0,616 0	0,766 0

a	7	8	9	10	11	12	13
$P(X \leqslant a)$	0,872 0	0,936 9	0,971 8	0,988 5	0,995 7	0,998 5	0,999 5

a. *Rappel du cours de première*

L'intervalle de fluctuation à 95 % d'une fréquence correspondant à la réalisation, sur un échantillon aléatoire de taille n, d'une variable aléatoire X de loi binomiale, est l'intervalle $\left[\dfrac{a}{n}\,;\,\dfrac{b}{n}\right]$, dans lequel :

- a est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) > 0,025$;
- b est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$.

En observant le tableau ci-dessus, on trouve $a = 1$ et $b = 10$ ce qui conduit à l'intervalle de fluctuation à 95 % : $I = \left[\dfrac{1}{100}\,;\,\dfrac{10}{100}\right] = [0,01\,;\,0,10]$.

b. La fréquence observée par le rôtisseur est de $\dfrac{9}{100} = 0,09$; cette fréquence appartient à l'intervalle I donc le rôtisseur n'a pas de raison de se plaindre, au risque de 5 %.