Corrigé du baccalauréat STI2D et STL spécialité SPCL
Antilles-Guyane – 16 juin 2017

EXERCICE 1 (4 points)

Dans cet exercice, i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. La suite (u_n) est définie par $u_0 = -3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{7}{5}u_n$.
La limite quand n tend vers $+\infty$ de (u_n) est :

a. 0 **b.** $\boxed{-\infty}$ **c.** $+\infty$ **d.** -3

La suite (u_n) est géométrique de raison $q = \frac{7}{5}$ et de premier terme $u_0 = -3$ donc,
pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = -3 \times \left(\frac{7}{5}\right)^n$.
$\frac{7}{5} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{7}{5}\right)^n = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -3 \times \left(\frac{7}{5}\right)^n = -\infty$.

2. On considère la suite géométrique (v_n) définie par son premier terme $v_0 = \frac{1}{4}$ et sa raison $q = \frac{3}{2}$.
La valeur exacte du terme v_{10} est égale à :

a. 14,4 **b.** $7,3 \times 10^{-4}$ **c.** $\boxed{\frac{59\,049}{4\,096}}$ **d.** $\frac{15}{4}$

La suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = \frac{1}{4}$ et de raison $q = \frac{3}{2}$ donc,
pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$. Donc $v_{10} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{10} = \frac{3^{10}}{4 \times 2^{10}} = \frac{59\,049}{4\,096}$

3. On considère le nombre complexe $z = \sqrt{3} - 5\text{i}$. Le nombre complexe $z\overline{z}$ est égal à :

a. $3 - 25\text{i}$ **b.** $\left(-\sqrt{3} + 5\text{i}\right)\left(\sqrt{3} - 5\text{i}\right)$ **c.** -28 **d.** $\boxed{28}$

$z\overline{z} = |z|^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + (-5)^2 = 3 + 25 = 28$

4. Le nombre a est un réel strictement positif. Le nombre complexe $z = a + \text{i}a\sqrt{3}$ admet pour forme exponentielle :

a. $\text{e}^{\text{i}\frac{a\pi}{3}}$ **b.** $a\,\text{e}^{\text{i}\frac{2a\pi}{3}}$ **c.** $\boxed{2a\,\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}}$ **d.** $2a\,\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$

$|z| = \sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4a^2} = 2a$ donc $z = 2a\left(\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2a\left(\cos\frac{\pi}{3} + \text{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2a\,\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$

EXERCICE 2 (7 points)

En 1648, Blaise Pascal a demandé à son beau-frère Florin Périer de mesurer la hauteur de mercure dans deux baromètres, l'un situé à Clermont-Ferrand et l'autre en haut de la montagne la plus proche, le Puy-de-Dôme.
Florin Périer a constaté que la hauteur de mercure dans le baromètre situé en haut du Puy-de-Dôme était inférieure à la hauteur de mercure dans le baromètre situé plus bas, à Clermont-Ferrand.
Cette expérience a permis de montrer que la pression atmosphérique diminue lorsque l'altitude augmente.
Dans cet exercice, la pression atmosphérique est exprimée en hectopascal (hPa).
On rappelle que la pression atmosphérique vaut 1 013,25 hPa *au niveau de la mer.*

Partie A : Une règle simplifiée

Pour évaluer la pression atmosphérique, les alpinistes utilisent la règle simplifiée suivante : « la pression atmosphérique diminue de 0,11 hectopascal quand l'altitude augmente de 1 mètre ».

1. La pression baisse de 0,11 hPa par mètre donc elle baisse de $800\times 0,11 = 88$ hPa pour 800 mètres; la pression à 800 mètres est donc $1\,013,25-88 = 925,25$ hPa.

   On fait un calcul similaire pour obtenir la pression à 1 500 m et à 2 000 m.

   On complète alors le tableau en utilisant cette règle :

altitude (en mètre)	0	800	1 500	2 000
pression atmosphérique (en hPa)	1 013,25	925,25	848,25	793,25

2. Pour tout entier naturel n, on note u_n la pression atmosphérique en hPa à l'altitude de n mètres calculée avec la règle simplifiée. Ainsi $u_0 = 1013,25$.

   a. $u_1 = u_0 - 0,11 = 1\,013,25 - 0,11 = 1\,013,14$; $u_2 = u_1 - 0,11 = 1\,013,14 - 0,11 = 1\,013,03$

   b. $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{1\,013,03}{1\,013,14} \approx 0,999\,891\,4267$; $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{1\,013,14}{1\,013,25} \approx 0,999\,891\,4384$

   $\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_1}{u_0}$ donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

   c. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 - 0,11n$.

   La pression atmosphérique est inférieure à 950 hPa pour les valeurs de n telles que :

   $u_n < 950 \iff u_0 - 0,11n < 950 \iff 1013,25 - 0,11n < 950 \iff 63,25 < 0,11n$

   $\iff \dfrac{63,25}{0,11} < n \iff n > 575$

   La pression sera inférieure à 950 hPa pour une altitude supérieure à 575 mètres.

Partie B : La formule barométrique

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 0,12y = 0$.
Pour de faibles valeurs de l'altitude, les scientifiques ont démontré que la fonction f qui, à l'altitude x **en kilomètre**, associe la pression atmosphérique en hectopascal est la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie $f(0) = 1013,25$.

1. **a.** L'équation différentielle $y' + 0,12y = 0$ est de la forme $y' + ay = 0$ avec $a \neq 0$.

   D'après le cours, les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions f définies sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = C\,\mathrm{e}^{-ax}$ où C est un réel quelconque.

   Donc les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = C\,\mathrm{e}^{-0,12x}$ où C est un réel quelconque.

   b. La solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1013,25$ est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ telle que $C\,\mathrm{e}^0 = 1013,25$ donc telle que $C = 1\,013,25$.

   La solution f vérifiant la condition initiale est donc définie par $f(x) = 1\,013,25\,\mathrm{e}^{-0,12x}$.

2. En utilisant la fonction f :

   a. Une altitude de 150 mètres correspond à 0,15 kilomètre donc la pression atmosphérique à 150 mètres d'altitude est

   $f(0,15) = 1\,013,25\,\mathrm{e}^{-0,12\times 0,150} = 1\,013,25\,\mathrm{e}^{-0,018} \approx 995,17$ hPa.

   b. L'altitude correspondant à une pression atmosphérique de 900 hPa est la solution (en kilomètre) de l'équation $f(x) = 900$:

   $f(x) = 900 \iff 1\,013,25\,\mathrm{e}^{-0,12x} = 900 \iff \mathrm{e}^{-0,12x} = \dfrac{900}{1\,013,25} \iff -0,12x = \ln\dfrac{900}{1\,013,25}$

   $\iff x = -\dfrac{\ln\dfrac{900}{1\,013,25}}{0,12} \implies x \approx 0,988$

   L'altitude correspondant à une pression atmosphérique de 900 hPa est 988 mètres.

3. On pose $v_n = f(n)$, pour tout entier naturel n.

$v_{n+1} = f(n+1) = 1013,25\,\mathrm{e}^{-0,12(n+1)} = 1013,25\,\mathrm{e}^{-0,12n-0,12} = 1013,25\,\mathrm{e}^{-0,12n} \times \mathrm{e}^{-0,12} =$

$v_{n+1} = v_n \times \mathrm{e}^{-0,12}$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\mathrm{e}^{-0,12}$.

Partie C : La formule du nivellement barométrique

La formule de la partie B ne tient pas compte des changements de température et ne peut donc être utilisée que pour de faibles altitudes.

Pour des altitudes plus élevées, on utilise la fonction p qui, à l'altitude x **en kilomètre**, associe la pression atmosphérique en hPa : $p(x) = 1013,25\left(1 - \dfrac{6,5x}{288,15}\right)^{5,255}$.

1. La pression atmosphérique au sommet de l'Everest est $p(8,848) \approx 314$ hPa.

2. On complète l'algorithme suivant de façon à ce qu'il affiche en sortie l'altitude (estimée à 100 mètres près) à partir de laquelle la pression atmosphérique est inférieure à 400 hPa :

Variables
A un nombre réel
P un nombre réel
Début
A prend la valeur 0
P prend la valeur 1 013,25
Tant que $P \geqslant 400$ **faire**
    A prend la valeur $A + 0,1$
    P prend la valeur $p(A)$
Fin tant que
Afficher P
Fin

EXERCICE 3 (4 points)

Un ingénieur prépare un plan pour fabriquer la voile d'un petit bateau.
La voile est représentée en gris dans le repère orthonormé ci-dessous où une unité représente un mètre.
$\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0,1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 12 + ax^2 + \ln(x).$$

où a est un nombre réel qui sera déterminé dans la partie A.

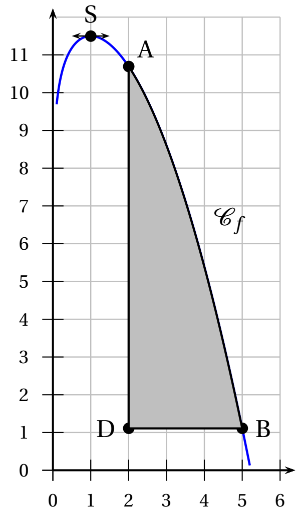
S est le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 1.

A est le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 2.

B est le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 5.

D est le point d'intersection de la droite d'équation $x = 2$ et de la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par B.

La voile est représentée par le domaine délimité par le segment [AD], le segment [DB] et la courbe $\mathscr{C}_f$.



Partie A

La fonction f' désigne la fonction dérivée de f.

1. On suppose que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point S est horizontale; donc $f'(1) = 0$.
2. Pour tout réel x de $[0,1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = 2ax + \dfrac{1}{x}$.
3. **a.** $f'(x) = 2ax + \dfrac{1}{x}$ donc $f'(1) = 2a + 1$.

   b. $f'(1) = 0$ et $f'(1) = 2a + 1$ donc $2a + 1 = 0$ ce qui entraîne que $a = -0,5$ et donc que $f(x) = 12 - 0,5x^2 + \ln(x)$.

Partie B

1. Soit F la fonction définie sur $[0,1\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = 11x - \dfrac{1}{6}x^3 + x\ln(x)$.

   Pour tout x de $[0,1\ ;\ +\infty[$,
   $F'(x) = 11 - \dfrac{1}{6} \times 3x^2 + 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} = 11 - 0,5x^2 + \ln(x) + 1 = 12 - 0,5x + \ln(x) = f(x)$.
   Donc F est une primitive de f sur $[0,1\ ;\ +\infty[$.

2. **a.** La fonction f est positive sur $[2\ ;\ 5]$ donc l'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 5$ est :
   $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_2^5 = F(5) - F(2) = \left(\frac{205}{6} + 5\ln(5)\right) - \left(\frac{62}{3} + 2\ln(2)\right) = \frac{27}{2} + 5\ln(5) - 2\ln(2)\ \text{m}^2$.

   b. $\dfrac{27}{2} + 5\ln(5) - 2\ln(2) \approx 20,2\ \text{m}^2$

3. Cette voile doit être légère tout en étant suffisamment résistante. Elle est fabriquée dans un tissu ayant une masse de 260 grammes par mètre carré.

   L'aire de la voile en mètre carré est égale à l'aire de la partie grise soit :

   $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x - \text{DB} \times f(5) = \frac{27}{2} + 5\ln(5) - 2\ln(2) - 3 \times \left(-\frac{1}{2} + \ln 5\right) = 15 + 2\ln(5) - 2\ln(2) = 15 + 2\ln(2,5)$.

   La voile pèsera donc $\big(15 + 2\ln(2,5)\big) \times 0,26 \approx 4,376$ kg donc moins de 5 kg.

EXERCICE 4 (5 points)

Partie A

Pour dépister les maladies de la glande thyroïde chez un patient, on mesure le taux d'une hormone appelée TSH.
Un médecin étudie les dossiers médicaux des patients de son hôpital.
On désigne par X la variable aléatoire qui, à un dossier pris au hasard dans cet hôpital, associe le taux de TSH du patient correspondant.
On suppose que X suit la loi normale de moyenne $\mu = 2{,}2$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}9$.

1. On trouve à la calculatrice que $P(X < 3) \approx 0{,}813$.

2. La probabilité qu'un dossier médical pris au hasard dans cet hôpital présente un taux de TSH compris entre 1,5 et 3,5 est $P(1{,}5 < X < 3{,}5) \approx 0{,}707$.

3. Pour les dossiers médicaux dont le taux de TSH est supérieur à 4, les médecins prescrivent des examens complémentaires au patient.

   La probabilité qu'un dossier médical pris au hasard dans cet hôpital corresponde à un patient qui nécessite des examens complémentaires est $P(X > 4) \approx 0{,}023$.

Partie B

En 2012, l'Agence Nationale de Sécurité du Médicament (ANSM) s'est inquiétée de la forte augmentation des ventes du médicament qui traite l'hypothyroïdie. Pour obtenir un état des lieux de l'utilisation de ce médicament en France, l'ANSM a effectué un sondage sur 530 877 personnes. Dans cet échantillon, 21 771 personnes ont déclaré qu'elles utilisaient ce médicament.

1. La fréquence des utilisateurs du médicament dans l'échantillon étudié est $f = \dfrac{21\,771}{530\,877} \approx 0{,}041$.

2. On détermine un intervalle de confiance avec un niveau de confiance de 95 % de la proportion d'utilisateurs de ce médicament dans la population française :

$$I = \left[f - 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\ ;\ f + 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$$
$$= \left[0{,}041 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}041(1-0{,}041)}{530\,877}}\ ;\ 0{,}041 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}041(1-0{,}041)}{530\,877}}\right] \approx [0{,}040\ ;\ 0{,}042]$$

Partie C

En médecine, on utilise de l'iode radioactif pour traiter certaines maladies de la glande thyroïde. La durée de vie exprimée en heure d'un atome d'iode radioactif est modélisée par une variable aléatoire D qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0036$, exprimé en h^{-1}.

1. La durée de vie moyenne de l'atome d'iode radioactif est $E(D) = \dfrac{1}{\lambda} \approx 278$ heures.

2. D'après le cours :
   $P(24 < D < 48) = \displaystyle\int_{24}^{48} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_{24}^{48} = -\,\mathrm{e}^{-0{,}0036\times 48} - \left(-\,\mathrm{e}^{-0{,}0036\times 24}\right) = \mathrm{e}^{-0{,}0864} - \mathrm{e}^{-0{,}1728}$

   $\approx 0{,}076.$

   Cela signifie qu'il y a environ 7,6 % d'atomes d'iode encore en vie entre 24 et 48 heures.

3. On appelle demi-vie d'un élément radioactif le temps T, exprimé en heure, nécessaire pour que la moitié des atomes radioactifs d'une substance se soit désintégrée. Autrement dit, ce réel T est tel que $P(D < T) = \frac{1}{2}$.

a. Si la variable aléatoire D suit la loi exponentielle de paramètre λ, alors $P(D < t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

$$P(D < T) = \frac{1}{2} \iff 1 - \mathrm{e}^{-\lambda T} = \frac{1}{2} \iff 2 - 2\,\mathrm{e}^{-\lambda T} = 1 \iff 1 = 2\,\mathrm{e}^{-\lambda T} \iff \frac{1}{2} = \mathrm{e}^{-\lambda T}$$

$$\iff \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda T \iff -\ln(2) = -\lambda T \iff T = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

b. La demi-vie de l'iode radioactif est $\dfrac{\ln(2)}{0,0036} \approx 192,5$ heures soit environ 8 jours.