Corrigé du baccalauréat STI2D et STL spécialité SPCL
Antilles-Guyane – 19 juin 2018

EXERCICE 1 **3 points**

Le béton est un matériau de construction fabriqué à partir d'un mélange de ciment, de granulats et d'eau. Selon l'usage prévu (dalle, poutre, fondation, ...), on utilise des bétons de compositions différentes. Dans cet exercice, on s'intéresse au béton adapté à la construction d'une dalle et on étudie la résistance à la compression, exprimée en MPa (mégapascal), en fonction de la durée t de séchage, exprimée en jour. On admet que cette résistance peut être modélisée par une fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, qui est une solution sur $[0~;~+\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $y' + 0{,}15y = 4{,}5$.

1.
- D'après le cours, l'équation différentielle $y' + 0{,}15y = 0$ a pour solutions les fonctions $t \longmapsto k\,\mathrm{e}^{-0{,}15t}$ où $k \in \mathbb{R}$.
- L'équation différentielle $y' + 0{,}15y = 4{,}5$ a pour solution particulière la fonction constante $t \longmapsto \dfrac{4{,}5}{0{,}15}$ soit $t \longmapsto 30$.

Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions $f~:~t \longmapsto k\,\mathrm{e}^{-0{,}15t} + 30$ $(k \in \mathbb{R})$.

2. À l'instant $t = 0$, la résistance à la compression de ce béton est nulle ce qui veut dire que $f(0) = 0$.

$f(0) = 0 \iff k\,\mathrm{e}^{-0{,}15\times 0} + 30 = 0 \iff k = -30$

Donc $f(t) = -30\,\mathrm{e}^{-0{,}15t} + 30$.

3. On cherche $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -0{,}15t = -\infty\\ \text{on pose } T = -0{,}15t\\ \displaystyle\lim_{T\to-\infty} \mathrm{e}^{T} = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}15t} = 0 \text{ donc } \lim_{t\to+\infty} -30\,\mathrm{e}^{-0{,}15t} + 30 = 30$$

On a donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 30$.

Cela signifie que lorsque le temps augmente, la résistance va tendre vers 30 MPa.

4. Il est possible de marcher sur ce type de béton lorsque sa résistance à la compression est supérieure à 12 MPa.

On cherche t en jours tel que $f(t) > 12$; on résout cette inéquation.

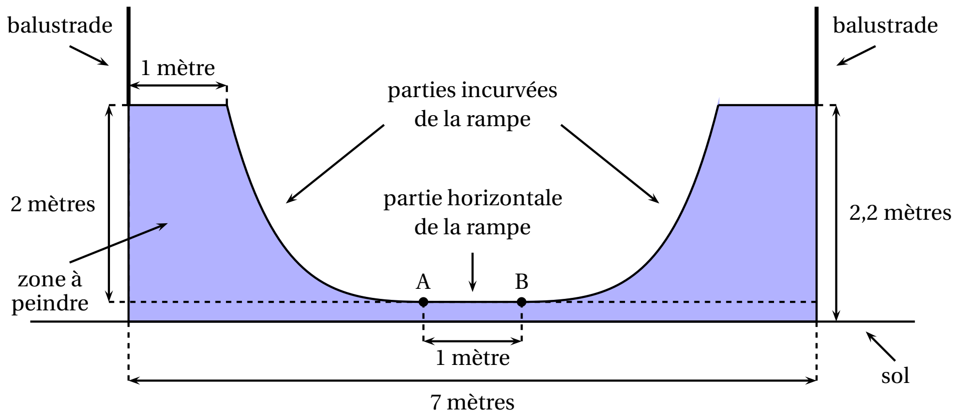
$$f(t) > 12 \iff -30\,\mathrm{e}^{-0{,}15t} + 30 > 12 \iff 18 > 30\,\mathrm{e}^{-0{,}15t} \iff \frac{18}{30} > \mathrm{e}^{-0{,}15t} \iff 0{,}6 > \mathrm{e}^{-0{,}15t}$$

$$\iff \ln(0{,}6) > -0{,}15t \iff -\frac{\ln(0{,}6)}{0{,}15} < t$$

Or $-\dfrac{\ln(0{,}6)}{0{,}15} \approx 3{,}40$; donc c'est à partir du 4e jour qu'on pourra marcher sur le béton.

EXERCICE 2 **7 points**

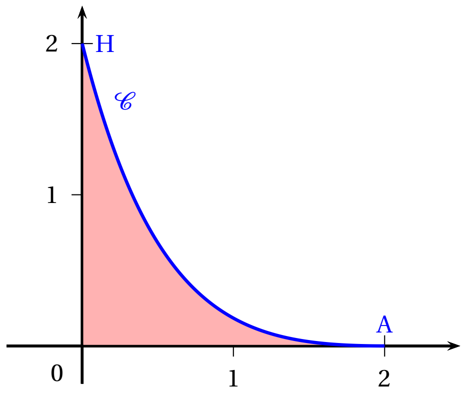
On a représenté ci-dessous une des faces latérales d'une rampe de skate-board.



On sait de plus que la face latérale de cette rampe de skate-board admet comme axe de symétrie la médiatrice de [AB].

Partie A

On modélise la partie incurvée de la rampe située à gauche de l'axe de symétrie à l'aide de la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par : $f(x) = \left(0,5x^2 + ax + b\right)\,\mathrm{e}^{-x}$
où a et b sont deux réels que l'on souhaite déterminer.
On a tracé ci-après la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormal d'unité 1 mètre.



On sait que la courbe $\mathscr{C}$ passe par les points A$(2\,;\,0)$ et H$(0\,;\,2)$.

1. La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point H $(0\,,\,2)$ donc $f(0) = 2$.
   La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A $(2\,,\,0)$ donc $f(2) = 0$.
2. On sait que $f(x) = \left(0,5x^2 + ax + b\right)\,\mathrm{e}^{-x}$.
   - $f(0) = 2 \iff \left(0,5 \times 0^2 + a \times 0 + b\right)\,\mathrm{e}^{0} = 2 \iff b = 2$
   - $f(2) = 0 \iff \left(0,5 \times 2^2 + a \times 2 + b\right)\,\mathrm{e}^{2} = 0 \iff 2 + 2a + b = 0$

   Les réels a et b vérifient donc le système $\left\{\begin{array}{rcl} b & = & 2 \\ 2 + 2a + b & = & 0 \end{array}\right.$
3. Le système précédent donne $b = 2$ et $a = -2$; donc $f(x) = \left(0,5x^2 - 2x + 2\right)\,\mathrm{e}^{-x}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par : $f(x) = \left(0,5x^2 - 2x + 2\right)\,\mathrm{e}^{-x}$.

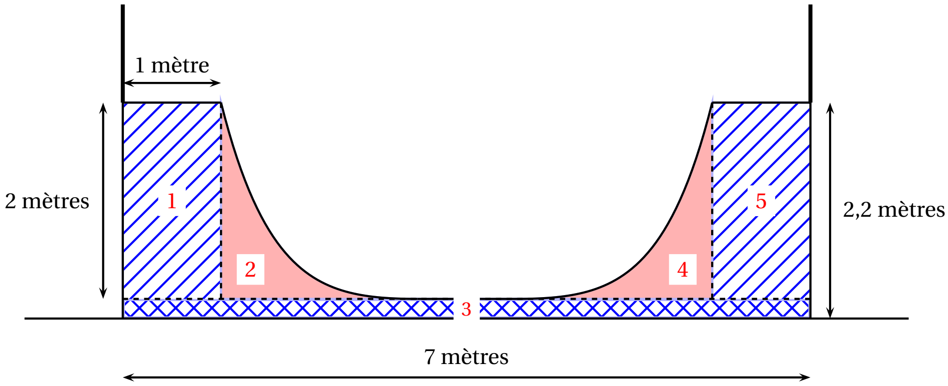
1. $f'(x) = (0,5 \times 2x - 2 + 0)\,\mathrm{e}^{-x} + \left(0,5x^2 - 2x + 2\right) \times (-1)\,\mathrm{e}^{-x} = \left(x - 2 - 0,5x^2 + 2x - 2\right)\,\mathrm{e}^{-x}$
   $= \left(-0,5x^2 + 3x - 4\right)\,\mathrm{e}^{-x}$
2. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A a pour équation $y = f'(x_{\text{A}})\,(x - x_{\text{A}}) + f(x_{\text{A}})$.
   $x_{\text{A}} = 2$ donc $f'(x_{\text{A}}) = f'(2) = (-2 + 6 - 4)\,\mathrm{e}^{-x} = 0$; de plus $f(x_{\text{A}}) = 0$.
   La tangente a pour équation $y = 0$, c'est donc l'axe des abscisses.
3. $f'(x) = \left(-0,5x^2 + 3x - 4\right)\,\mathrm{e}^{-x}$; or, pour tout réel X, $\mathrm{e}^{X} > 0$. Donc $f'(x)$ est du signe du trinôme $-0,5x^2 + 3x - 4$.
4. On cherche le signe de $f'(x)$ donc de $-0,5x^2 + 3x - 4$.
   $\Delta = 3^2 - 4 \times (-0,5) \times (-4) = 9 - 8 = 1$
   Le trinôme admet deux racines $x' = \dfrac{-3 - \sqrt{1}}{2 \times (-0,5)} = 4$ et $x'' = \dfrac{-3 + \sqrt{1}}{-1} = 2$.
   D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$-0,5x^2 + 3x - 4$		$-$	0	$+$	|	$-$	

$f'(x) < 0$ sur $[0\,;\,2[$ donc la fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;\,2]$.

Partie C

1. La fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;\,2]$ donc pour tout x de $[0\,;\,2]$, $f(x) \geqslant f(2)$.
Or $f(2) = 0$ donc la fonction f est positive sur $[0\,;\,2]$.
2. On admet que la fonction F définie par $F(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 + x - 1\right)\mathrm{e}^{-x}$ sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ est une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,2]$.
L'aire en m^2 de la partie délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$ est égale à
$\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = F(2) - F(0) = \left(\left(-\frac{1}{2}2^2 + 2 - 1\right)\mathrm{e}^{-2}\right) - \left(\left(-\frac{1}{2}0 + 0 - 1\right)\mathrm{e}^{0}\right) = -\mathrm{e}^{-2} + 1 = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}^2}$
3. On découpe la surface à peindre en 5 surfaces.



- La région 1 est un rectangle de dimensions 1 sur 2 donc a une aire de 2 m^2.
- L'aire de la région 2 a été calculée dans la question précédente : $1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.
- La région 3 est un rectangle de dimensions 0,2 sur 7 donc a une aire de 1,4 m^2.
- Pour des raisons de symétrie, la région 4 a une aire égale à celle de la région 2.
- Pour des raisons de symétrie, la région 5 a une aire égale à celle de la région 1.

La région à peindre a pour aire, en m^2 : $2 + \left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right) + 1{,}4 + \left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right) + 2 = 7{,}4 - \dfrac{2}{\mathrm{e}^2} \approx 7{,}13$.

Exercice 3 **6 points**

Une éolienne est un générateur qui produit du courant électrique à partir de l'énergie cinétique du vent. Une entreprise européenne réalise la conception, la fabrication, la vente, l'installation ainsi que l'exploitation et la maintenance de ses éoliennes. Son service de presse a publié un article en janvier 2017 dont voici un extrait :
« Une de nos usines située en Espagne, en exploitation depuis 2001, a produit au total plus de 40 000 pales d'éoliennes de 2001 à 2016, pales qui ont été exportées vers cinq continents. »

On dispose également des données suivantes sur la production de l'usine espagnole considérée.

Année	Quantité de pales produites pendant l'année
2001	800
2008	2 002

Partie A

Le but de cette partie est de trouver une suite modélisant au mieux la production des pales d'éoliennes de l'usine espagnole depuis 2001. On étudie deux modélisations.

1. Dans cette question, on se propose de modéliser le nombre de pales produites par l'usine espagnole pendant l'année $2001 + n$, où n est un entier naturel, par la valeur arrondie à l'entier le plus proche de u_n où $u_n = 800 + 578\ln(n+1)$.

a. • L'année 2001 correspond à $n = 0$ et $u_0 = 800 + 578\ln(1) = 800$.

• L'année 2008 correspond à $n = 7$ et $u_7 = 800 + 578\ln(8)$ qui a pour valeur arrondie à l'unité près 2 002.

Donc la suite (u_n) satisfait aux données du tableau.

b. On considère l'algorithme suivant :

$S \leftarrow 0$
Pour i allant de 0 à 15
$\quad S \leftarrow S + \text{ARRONDI}(800 + 578\ \ln(i+1))$
Fin Pour

Une fois l'algorithme exécuté, S contient la valeur 30 529.

La variable S donne le nombre total de pales produites pour n compris entre 0 et 15, c'est-à-dire entre 2001 et 2016.

c. D'après ce modèle, il n'y a eu que 30 529 pales produites entre 2001 et 2016 alors que le service de presse de l'entreprise en annonce « plus de 40 000 ».

La suite (u_n) ne peut donc pas modéliser la production des pales d'éoliennes de l'usine espagnole depuis 2001.

2. On examine maintenant une modélisation de la production par la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 800$ et de raison $q = 1{,}14$.

a. $v_n = v_0 \times q^n = 800 \times 1{,}14^n$

b. $v_7 = 800 \times 1{,}14^7 \approx 2\,002$ (à l'unité près).

c. $v_0 + v_1 + \ldots + v_{15} = v_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = 800 \times \dfrac{1-1{,}14^{16}}{1-1{,}14}$ a pour valeur arrondie à l'unité 40 784.

d. • Le service de presse avait annoncé « plus de 40 000 » pales produites entre 2001 et 2015. La modélisation par la suite (v_n) en prévoit 40 784.

• De plus pour 2001, $v_0 = 800$ et pour 2008, $v_7 = 2\,002$ donc la suite (v_n) satisfait aux données du tableau.

On peut donc modéliser par la suite (v_n) la production, depuis 2001, de pales d'éoliennes de l'usine espagnole.

Partie B

L'entreprise gère aussi la réparation des pales sur leur lieu d'utilisation.
On estime que la durée de vie d'une pale, exprimée en années, avant la première réparation, est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}125$.

1. On sait que pour ne variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ, pour tout $x \leqslant 0$, $P(X \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$

Donc $P(0 \leqslant X \leqslant 5) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}125\times 5} = 1 - \mathrm{e}^{0{,}625} \approx 0{,}465$.

2. La probabilité qu'une pale n'ait pas eu de réparation au cours des dix premières années est $P(X > 10) = 1 - P(X \leqslant 10) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}125\times 10}\right) = \mathrm{e}^{-1{,}25} \approx 0{,}287$.

3. La durée de vie moyenne d'une pale avant la première réparation est, en années, $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0{,}125} = 8$.

EXERCICE 4 **4 points**

1. Si $z_1 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ alors le quotient $\dfrac{z_1}{(z_2)^2}$ vaut :

a. -2 **b.** $-\sqrt{3} + \mathrm{i}$ **c.** $\boxed{2}$ **d.** $-\sqrt{3} - \mathrm{i}$

$|z_1| = 2$ donc $z_1 = 2\left(-\dfrac{1}{2} + \text{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\,\text{e}^{\,\text{i}\,\frac{2\pi}{3}}$ et $z_2 = \text{e}^{\,\text{i}\,\frac{\pi}{3}}$ donc $z_2^2 = \left(\text{e}^{\,\text{i}\,\frac{\pi}{3}}\right)^2 = \text{e}^{\,\text{i}\,\frac{2\pi}{3}}$

On en déduit que $\dfrac{z_1}{(z_2)^2} = \dfrac{2\,\text{e}^{\,\text{i}\,\frac{2\pi}{3}}}{\text{e}^{\,\text{i}\,\frac{2\pi}{3}}} = 2$.

Réponse c.

2. Si $z_1 = -1 + \text{i}\sqrt{3}$ et $z_2 = \text{e}^{\,\text{i}\,\frac{\pi}{3}}$ alors le produit $\overline{z_1} \times z_2$ vaut :

a. -2 **b.** $\boxed{1 - \text{i}\sqrt{3}}$ **c.** $\text{e}^{\,\text{i}\pi}$ **d.** $-1 - \text{i}\sqrt{3}$

$z_1 = 2\,\text{e}^{\,\text{i}\,\frac{2\pi}{3}}$ donc $\overline{z_1} = 2\,\text{e}^{-\text{i}\,\frac{2\pi}{3}}$

$\overline{z_1} \times z_2 = 2\,\text{e}^{-\text{i}\,\frac{2\pi}{3}} \times \text{e}^{\,\text{i}\,\frac{\pi}{3}} = 2\,\text{e}^{-\text{i}\,\frac{\pi}{3}} = 2\left(\dfrac{1}{2} - \text{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \text{i}\sqrt{3}$

Réponse b.

3. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ.
Sachant que $P(X \in [189\ ;\ 191]) \approx 0{,}95$, μ et σ peuvent prendre les valeurs :

a. $\mu = 1$ et $\sigma = 190$ **b.** $\mu = 190$ et $\sigma = 1$

c. $\boxed{\mu = 190 \text{ et } \sigma = 0{,}5}$ **d.** $\mu = 0{,}5$ et $\sigma = 190$

Pour une variable aléatoire X suivant une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ, on sait que $P\left(X \in [\mu - 2\sigma\,;\mu + 2\sigma]\right) \approx 0{,}95$.
Si $\mu = 190$ et $\sigma = 0{,}5$, alors $P\left(X \in [190 - 2 \times 0{,}5\,; 190 + 2 \times 0{,}5]\right) \approx 0{,}95$.
Réponse c.

4. Dans le cadre du fonctionnement correct d'une chaîne de production de pièces détachées, la proportion de pièces détachées conformes doit être 96 %.

On contrôle la production de la chaîne en prélevant de manière aléatoire un échantillon de 150 pièces détachées.

En utilisant un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 %, on prendra la décision d'effectuer des réglages sur la chaîne de production si le nombre de pièces détachées non conformes trouvées dans l'échantillon prélevé est :

a. 8 **b.** 9 **c.** 10 **d.** $\boxed{11}$

$p = 0{,}96$ et $n = 150$ donc l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la proportion de pièces conformes est

$$I = \left[p - 1{,}96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1{,}96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right]$$
$$= \left[0{,}96 - 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}96 \times 0{,}04}{150}}\ ;\ 0{,}96 + 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}96 \times 0{,}04}{150}}\right] \approx \left[0{,}928\,; 0{,}992\right]$$

On calcule les fréquences correspondant à chacune des réponses proposées.

Si 8 pièces sont non conformes, 142 sont conformes; $f_{\text{a}} = \dfrac{142}{150} \approx 0{,}947 \in I$.

Si 9 pièces sont non conformes, 141 sont conformes; $f_{\text{b}} = \dfrac{141}{150} = 0{,}947 \in I$.

Si 10 pièces sont non conformes, 140 sont conformes; $f_{\text{c}} = \dfrac{140}{150} \approx 0{,}933 \in I$.

Si 11 pièces sont non conformes, 139 sont conformes; $f_{\text{d}} = \dfrac{139}{150} \approx 0{,}927 \notin I$.

Réponse d.