Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI2D/STL – SPCL 16 juin 2016 Antilles-Guyane

EXERCICE 1 **3 points**

1. $\dfrac{1+2\text{i}}{3-\text{i}} = \dfrac{(1+2\text{i})(3+\text{i})}{(3-\text{i})(3+\text{i})} = \dfrac{3-2+\text{i}+6\text{i}}{9+1} = \dfrac{1+7\text{i}}{10} = \dfrac{1}{10}+\text{i}\dfrac{7}{10}$: réponse **b.**
2. $\left|2-2\text{i}\sqrt{3}\right|^2 = 4+4\times 3 = 4+12 = 16 = 4^2$, donc $\left|2-2\text{i}\sqrt{3}\right| = 4$.
   D'où $2-2\text{i}\sqrt{3} = 4\left(\dfrac{2}{4}-\dfrac{2}{4}\text{i}\sqrt{3}\right) = 4\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{i}\right) = 4\left(\cos\frac{-\pi}{3}+\text{i}\sin\frac{-\pi}{3}\right) = 4\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$. Réponse **c.**
3. $\ln a+\ln 2a = \ln a\times 2a = \ln\left(2a^2\right)$. Réponse **c.**
4. $3y''+12y = 0 \iff y''+4y = 0$
   On sait qu'une solution de cette équation différentielle est définie par
   $f(t) = \sin(2t)$, t étant un réel quelconque. Réponse **b.**

EXERCICE 2 **7 points**

Partie A - Étude graphique

1. $f(1) = 0$;
2. $f'(2,5) = \dfrac{0-1,5}{5,5-2,5} = -\dfrac{1}{2}$;
3. Une équation de la tangente T est $y-f(2,5) = f'(2,5)(x-2,5)$; avec
   $f(2,5) = 1,5$ et $f'(2,5) = -\dfrac{1}{2}$, on obtient : $y-1,5 = -0,5(x-2,5)$, soit
   $y = -0,5x+2,75$;
4. $\displaystyle\lim_{+\infty} f(x) = 0$.

Partie B - Modélisation

1. $f'(x) = a\text{e}^{-x+2,5}-(ax+b)\text{e}^{-x+2,5} = \text{e}^{-x+2,5}(a-ax-b) = (-ax+a-b)\text{e}^{-x+2,5}$.
2. • $f(1) = (a+b)\text{e}^{-1+2,5} = (a+b)\text{e}^{1,5}$;
   • $f'(2,5) = (-2,5a+a-b)\text{e}^{-2,5+2,5} = (-1,5a-b)\text{e}^{0} = -1,5a-b$.
3. D'après les résultats de la partie A (lecture graphique a et$b$ vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcr}(a+b)\text{e}^{1,5} & = & 0\\ -1,5a-b & = & -\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

4. Comme $\text{e}^{1,5}\neq 0$, la première équation entraîne $a+b = 0$ ou $b = -a$, d'où en reportant dans la seconde :
   $-1,5a+a = -0,5$ ou $-0,5a = -0,5$ ou $a = 1$ et $b = -1$.
   On a donc pour tout réel x,
   $f(x) = (x-1)\text{e}^{-x+2,5}$.

Partie C - Étude algébrique

On admet que pour tout réel x, $f(x) = (x-1)\text{e}^{-x+2,5}$.

1. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x-1=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{e}^{-x+2,5}=+\infty$, d'où par produit de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.
2. **a.** $f(x)=(x-1)\text{e}^{-x+2,5}=(x-1)\times\text{e}^{-x}\times\text{e}^{2,5}=\text{e}^{2,5}\left(\dfrac{x-1}{\text{e}^{-x}}\right)=\text{e}^{2,5}\left(\dfrac{x}{\text{e}^{x}}-\dfrac{1}{\text{e}^{x}}\right)$.

   b. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\text{e}^x}{x}=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\text{e}^x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\text{e}^x}=0$, d'où par somme de limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\text{e}^x}-\dfrac{1}{\text{e}^x}=0$ et enfin : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.
3. **a.** On a donc pour tout réel x, $f'(x)=\text{e}^{-x+2,5}-(x-1)\text{e}^{-x+2,5}=\text{e}^{-x+2,5}(1-x+1)=(2-x)\text{e}^{-x+2,5}$.

   b. On sait que pour tout réel x, $\text{e}^{-x+2,5}>0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $2-x$, donc :
   si $x<2$, $f'(x)>0$: la fonction f est croissante sur $]-\infty\ ;\ 2[$;
   si $x>2$, $f'(x)<0$: la fonction f est décroissante sur $[2\ ;\ +\infty[$;
   $f(2)=(2-1)\text{e}^{-2+2,5}=\text{e}^{0,5}$ est le maximum de la fonction sur $\mathbb{R}$.
   D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\text{e}^{0,5}$	$\searrow$	0

Partie D - Application

1. Voir l'annexe.
2. $I=\displaystyle\int_2^{2,5} g(x)\,\text{d}x=\int_2^{2,5}\left(-2x^2+12x-16\right)\,\text{d}x=\left[-\frac{2}{3}x^3+6x^2-16x\right]_2^{2,5}=$
   $-\dfrac{2}{3}\times 2,5^3+6\times 2,5^2-16\times 2,5-\left(-\dfrac{2}{3}\times 2^3+6\times 2^2-16\times 2\right)=-\dfrac{155}{12}+\dfrac{40}{3}=\dfrac{-155+160}{12}=\dfrac{5}{2}$.
3. **a.** Quel que soit le réel x, $F'(x)=-\text{e}^{-x+2,5}+x\text{e}^{-x+2,5}=\text{e}^{-x+2,5}(x-1)=f(x)$.
   Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

   b. On a donc $J=\displaystyle\int_1^{2,5} f(x)\,\text{d}x=[F(x)]_1^{2,5}=F(2,5)-F(1)=-2,5\text{e}^{-2,5+2,5}-\left(-1\text{e}^{-1+2,5}\right)=$
   $-2,5+\text{e}^{1,5}$.
4. **a.** En unité d'aire, on a donc :
   $S=\displaystyle\int_1^{2,5}\text{e}^{-x+2,5}(x-1)\,\text{d}x-\int_2^{2,5} g(x)\,\text{d}x=-2,5+\text{e}^{1,5}-\frac{5}{12}=\text{e}^{1,5}-\frac{35}{12}$.

   b. La calculatrice donne $\text{e}^{1,5}-\dfrac{35}{12}\approx 1,56502$ soit 1,57 unité d'aire au centième près.

EXERCICE 3 **3 points**

Partie A

1. On sait que $P(\mu-\sigma\leqslant M\leqslant\mu+\sigma)$ soit ici $P(120,95\leqslant M\leqslant 121,79)\approx 0,683$. (au millième près)
2. On a $P(M\geqslant 122,63)=P(M\geqslant 121,37)-P(121,37\leqslant M\leqslant 122,63)=0,5-P(121,37\leqslant M\leqslant 122,63)\approx 0,001$. (au millième près)

Partie B

1. La fréquence des pneus dans l'échantillon prélevé dont la masse dépasse 121,9 kg est égale à $f = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18} \approx 0,056$.
2. $I = \left[\dfrac{1}{18} - 1,96\sqrt{\dfrac{\frac{1}{18} \times \frac{17}{18}}{36}}\ ;\ \dfrac{1}{18} + 1,96\sqrt{\dfrac{\frac{1}{18} \times \frac{17}{18}}{36}}\right] \approx [-0,02\ ;\ 0,131]$, soit plus vraisemblable $I \approx [0\ ;\ 0,131]$.
3. La proportion de pneus dont la masse dépasse 121,9 kg est comprise entre 0 et 0,131.

EXERCICE 4 **6 points**

Partie A

1. On a donc $S_0 = 2$, puis $S_1 = 1,2S_0 = 1,2 \times 2 = 2,4$ et $S_2 = 1,2S_1 = 1,2 \times 2,4 = 2,88$.
2. Quel que soit le naturel n, on a $S_{n+1} = 1,2S_n$: ceci montre que la suite (S_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,2$ et de premier terme $S_0 = 2$.
3. On sait que $S_n = S_0 \times q^n = 2 \times 1,2^n$.
4. On résout l'inéquation :

   $2 \times 1,2^n \geqslant 10 \iff 1,2^n \geqslant 5 \iff n \ln 1,2 \geqslant \ln 5 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 5}{\ln 1,2} \approx 8,8$.

   La totalité de la ferme sera cultivée au cours de la 9e année soit en 2024.

Partie B

1.

Valeur de K		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valeur de U	1	1,8	2,6	3,4	4,2	5	5,8	6,6	7,4	8,2	9

2. Au bout de 10 ans la surface cultivée en bio sera de 8,8 ha.
3. On a $18 \times \dfrac{70}{100} = 12,6$. Comme $9 < 12,6$ la limite de superficie n'est pas atteinte au bout de 10 ans.
4.

```
Variables
        K un entier naturel
        U un nombre réel
Début
        U prend la valeur 1
        K prend la valeur 0
            Tant que U < 12,6
            U prend la valeur U + 0,8
            K prend la valeur K + 1
            Fin Tant que
        Afficher 2015 + K
Fin
```

ANNEXE 1

À rendre avec la copie