∽ Corrigé du baccalauréat STI 2D/STL spécialité SPCL ∾
Nouvelle-Calédonie 15 novembre 2016

EXERCICE 1 — 6 points

Partie A

L'objectif fixé est une réduction de 7 % par an des DMA; on applique cette réduction à la masse produite en 2011 : $590 - 590 \times \dfrac{7}{100} = 548{,}70$. Puis on applique cette réduction à ce qui aurait dû être la production de DMA en 2012 : $548{,}70 - 548{,}70 \times \dfrac{7}{100} \approx 510{,}3$ kg.
La production de DMA en 2013 est de 570 kg et elle aurait dû être de 510,3 kg donc on peut dire que l'objectif fixé par le Projet de Plan national de prévention des déchets n'a pas été atteint pour la période 2011-2013.

Partie B

On considère que les objectifs du plan national de prévention des déchets sont atteints à partir de 2013. On modélise par une suite (u_n) la quantité de DMA produits en kg par habitant, le terme u_n correspondant à l'année $(2013 + n)$. Ainsi $u_0 = 570$.

1. $u_1 = u_0 - u_0 \times \dfrac{7}{100} = 570\left(1 - \dfrac{7}{100}\right) = 530{,}1$ kg.
2. $2015 = 2013 + 2$ donc la masse de DMA produite en 2015 est $u_2 = u_1 \times \left(1 - \dfrac{7}{100}\right) \approx 493$ kg.
3. Baisser de 7 %, c'est multiplier par $1 - \dfrac{7}{100} = 0{,}93$; donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}93$ et de premier terme $u_0 = 570$.
   On en déduit que $u_n = u_0 \times q^n = 570 \times 0{,}93^n$.

Partie C

1. On entre dans l'algorithme la valeur $n = 4$:

	n	q	u
Entrées et initialisation	4	0,93	570
1er passage dans la boucle de l'algorithme			530
2e passage dans la boucle de l'algorithme			493
3e passage dans la boucle de l'algorithme			458
4e passage dans la boucle de l'algorithme			426

2. La valeur de u obtenue au quatrième passage dans la boucle de l'algorithme correspond à u_4, c'est-à-dire la masse de DMA supposée produite en $2013 + 4 = 2017$, si le modèle est conservé.
3. Entre 2013 et 2017 il y a 4 années.
   Une baisse de 7 % correspond à une multiplication par 0,93; une baisse de 7 % sur 4 ans correspond à une multiplication par $0{,}93^4 \approx 0{,}748$. Une multiplication par 0,748 correxpond à une baisse de $(1 - 0{,}748) \times 100 = 26{,}2$ %.
4. $2020 = 2013 + 7$ donc la quantité de DMA produits en 2020 est $u_7 = 570 \times 0{,}93^7 \approx 343$ kg.

EXERCICE 2 — 5 points

1. Considérons les deux nombres complexes $z_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{4}}$ et $z_2 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

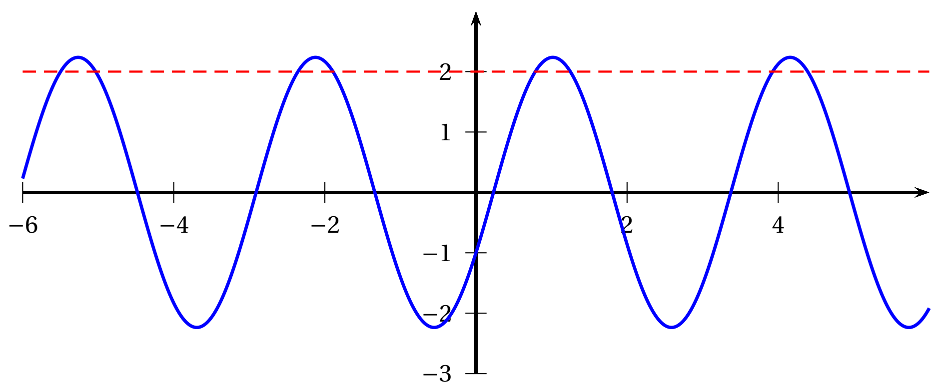
   Affirmation 1 : Le produit $z_1 \times z_2$ est égal à $2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{5\pi}{12}}$.

   $z_2 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ donc $|z_2| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$; $z_2 = 2\left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = 2\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{-\pi}{3}}$

   $z_1 \times z_2 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} \times 2\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{-\pi}{3}} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{-\pi}{3}\right)} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{5\pi}{12}}$

   Affirmation 1 vraie

2. **Affirmation 2 :** La solution f de l'équation différentielle $y" + 4y = 0$ qui vérifie $f(0) = -1$ et $f'(0) = 2$ admet comme représentation graphique :



   D'après le cours, les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions f définies par $f(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ où A et B sont deux réels quelconques.
   Donc les solutions de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$ sont les fonctions f définies par $f(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$ où A et B sont deux réels quelconques.

   - On sait que $f(0) = -1$ donc $A\cos(0) + B\sin(0) = -1 \iff A \times 1 + B \times 0 = -1 \iff A = -1$.
   - On en déduit que $f(t) = -\cos(2t) + B\sin(2t)$ donc $f'(t) = 2\sin(2t) + 2B\cos(2t)$.
     On sait que $f'(0) = 2$ donc $2\sin(0) + 2B\cos(0) = 2 \iff 2 \times 0 + 2B \times 1 = 2 \iff 2B = 2 \iff B = 1$.

   La solution cherchée est donc la fonction f définie par $f(t) = -\cos(2t) + \sin(2t)$.
   On sait que, quel que soit le réel x, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant +1$ et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant +1$; on peut en déduire que, quel que soit le réel t, $-2 \leqslant -\cos(2t) + \sin(2t) \leqslant +2$.
   La courbe donnée dans le texte dépasse 2 en ordonnée (voir graphique) donc ce n'est pas la représentation graphique de la fonction f.

   Affirmation 2 fausse

3. **Affirmation 3 :** La solution de l'équation $\ln(x+3) = 5$ est $\mathrm{e}^5 - 3$.

   $\ln(x+3) = 5 \iff x = 3 = \mathrm{e}^5 \iff x = \mathrm{e}^5 - 3$

   Affirmation 3 vraie

4. La durée de vie en heures d'un certain type d'ampoules électriques est modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}000\,125$ (exprimé en h).
   Affirmation 4 : En moyenne, la durée de vie d'une ampoule est 1 250 h.

La durée de vie moyenne est l'espérance mathématique égale, dans le cas d'une loi exponentielle, à $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0,000\,125} = 8\,000$ heures.

Affirmation 4 fausse

5. **Affirmation 5 :** la fonction $F(x) = x\ln x - x + 2$ est une primitive de la fonction $f(x) = \ln x$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   $F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 + 0 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$.

   Affirmation 5 vraie

EXERCICE 3 — 4 points

On admet que la fonction f qui donne la concentration massique de chlore présent dans la piscine est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 0,05y = 0$ où y désigne une fonction de la variable t.

1. **a.** D'après le cours, on sait que les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sont les fonctions f définies par $f(t) = C\,\mathrm{e}^{-at}$ où C est un réel quelconque.

   Les solutions de l'équation différentielle (E) sont donc les fonctions f définies par $f(t) = C\,\mathrm{e}^{-0,05t}$ où C est un réel quelconque.

   b. Au moment de l'accident, à 20 h, le taux de chlore est indétectable donc à 0. On verse accidentellement 1 kg de chlore dans la piscine, ce qui fait 1 000 000 mg pour 600 000 litres d'eau, soit une concentration de $\dfrac{1\,000\,000}{600\,000} = \dfrac{5}{3}$ mg/L. Donc $f(0 = \dfrac{5}{3}$.

   $f(t) = C\,\mathrm{e}^{-0,05t}$ donc $f(0) = \dfrac{5}{3} \iff C\mathrm{e}^{0} = \dfrac{5}{3} \iff C = \dfrac{5}{3}$. Donc, sur $[0\,;\,+\infty[$, $f(t) = \dfrac{5}{3}\,\mathrm{e}^{-0,05t}$.

2. La piscine pourra ouvrir au public à partir du moment t où $f(t) \leqslant 0,25$; on résout cette inéquation :

   $$f(t) \leqslant 0,25 \iff \frac{5}{3}\,\mathrm{e}^{-0,05t} \leqslant 0,25 \iff \mathrm{e}^{-0,05t} \leqslant \frac{3}{5} \times 0,25 \iff \mathrm{e}^{-0,05t} \leqslant 0,15$$

   $$\iff -0,05t \leqslant \ln(0,15) \iff t \geqslant -\frac{\ln(0,15)}{0,05}$$

   Or $-\dfrac{\ln(0,15)}{0,05} \approx 38$ donc on pourra réouvrir la piscine au bout de 38 heures, soit à 10 heures le surlendemain de l'accident.

EXERCICE 4 8 points

Une usine fabrique des batteries au lithium-ion pour des vélos électriques. Le cahier des charges indique qu'une batterie mesure 15 cm de large. Lors de la fabrication, on modélise la largeur des batteries par une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 15$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}02$.

Partie A

Une batterie est jugée conforme lorsque sa largeur, exprimée en centimètres, appartient à l'intervalle $[14{,}95\ ;\ 15{,}05]$.

1. On détermine la probabilité qu'une batterie soit conforme : $P(14{,}95 \leqslant X \leqslant 15{,}05) \approx 0{,}988$.
   Donc la probabilité qu'une batterie soit non conforme est environ $1 - 0{,}988 = 0{,}012$.

L'usine vend ses batteries au lithium-ion par lots de 2 000 aux fabricants de vélos électriques. En moyenne, chaque lot de 2 000 batteries en contient 24 non conformes.
On note p la probabilité qu'une batterie soit non conforme. On prélève au hasard 2 000 batteries dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.
On modélise le nombre de batteries non conformes dans un lot de 2 000 par une variable aléatoire Y.

2. Une batterie a deux états possibles : elle est non conforme, avec une probabilité de $p = \dfrac{24}{2000} = 0{,}012$, ou elle est conforme avec une probabilité de $1 - p = 1 - 0{,}012 = 0{,}988$.
   On prélève 2 000 batteries dans une production assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise : il s'agit donc d'une répétition dans les mêmes conditions d'une épreuve qui n'a que 2 issues. La variable aléatoire Y qui donne le nombre de batteries non conformes suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 2000$ et $p = 0{,}012$.
3. La probabilité qu'il y ait au moins 30 batteries non conformes dans un lot de 2 000 batteries est $P(Y \geqslant 30) \approx 0{,}131$.
   Remarque - Le résultat est obtenu à la calculatrice; avec une calculatrice qui ne donne que $P(Y \leqslant x)$, on calculera $P(Y \geqslant 30) = 1 - P(Y \leqslant 29)$.

Partie B

Dans le cadre d'un fonctionnement correct des machines de la chaîne de production, on admet que la proportion p de batteries non conformes est 1,2 % soit 0,012. Le responsable de l'usine affirme qu'il ne vend pas de lot de 2 000 batteries qui en contienne plus de 40 non conformes.
$n = 2000 \geqslant 30$; $np = 24 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 1976$ donc on peut établir un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % :

$$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{n}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{n}\right] = \left[0{,}012 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}012 \times 0{,}988}}{2000}\ ;\ 0{,}012 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}012 \times 0{,}988}}{2000}\right]$$

$$\approx [0{,}007\ ;\ 0{,}017]$$

Avec 40 batteries non conformes sur 2 000, on obtient une fréquence de $\dfrac{40}{2000} = 0{,}02$; ce nombre n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation trouvé.
On peut donc douter de la fiabilité de l'affirmation du responsable de l'usine, au risque de 5 % de se tromper.