Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI 2D/STL Nouvelle-Calédonie 17 novembre 2014

EXERCICE 1 **6 points**

Au 1er janvier 2014, un particulier installe 20 m^2 de panneaux photovoltaïques à son domicile. Pour estimer la rentabilité de cette installation, il utilise la documentation suivante :

En France 1 m^2 de panneaux photovoltaïques correctement orientés produit environ 95 kWh/an. La première année, une installation produit effectivement cette quantité et on estime que la perte de rendement est de 3 % par an. La rentabilité financière est assurée à partir du moment où la quantité totale d'énergie produite depuis le début de l'installation dépasse 20 000

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note u_n la quantité d'énergie produite par l'installation durant l'année $2014 + n$.

Partie A

1. **a.** Déterminons la quantité d'énergie produite en 2014 :
   Si $1\,\text{m}^2$ produit 95 kWh alors $20\,\text{m}^2$ produiront 1 900 kWh ($20 \times 95 = 1\,900$)
   La quantité d'énergie produite en 2015 a baissé de 3 % par rapport à l'année précédente par conséquent elle a été multipliée par 0,97.
   $1900 \times 0,97 = 1\,843$.
   La production en 2015 s'élève à 1 843 kWh.

   b. À une diminution de 3 % correspond un coefficient multiplicateur de (1-0,03) c'est-à-dire de 0,97.
   Chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par 0,97.
   Le terme précédent u_{n+1} est u_n donc $u_{n+1} = 0,97 \times u_n$ pour tout entier naturel n.
   La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme 1 900 et de raison 0,97
   Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est
   $u_n = u_0 \times (q)^n$. Donc $u_n = 1\,900 \times 0,97^n$.

2. Déterminons une estimation à la dizaine de kWh près, que l'on peut donner de la quantité d'énergie produite en 2044.
   En 2044, $n = 30$. En remplaçant n par 30 dans l'expression de u_n, nous avons $u_{30} = 1\,900 \times 0,97^{30} \approx 761,913$.
   Une estimation à la dizaine de kWh près, que l'on peut donner de la quantité d'énergie produite en 2044 est 760 kWh.

3. La quantité d'énergie produite annuellement au bout d'un grand nombre d'années tend vers 0.

4. Pour déterminer en quelle année l'installation aura perdu plus de la moitié de son rendement, résolvons
   $1\,900 \times (0,97)^n \leqslant \dfrac{1\,900}{2}$.
   $(0,97)^n \leqslant \dfrac{1}{2} \iff n \ln 0,97 \leqslant -\ln 2 \iff n \geqslant \dfrac{-\ln 2}{\ln 0,97}$. Or $\dfrac{-\ln 2}{\ln 0,97} \approx 22,76$.
   Nous pouvons estimer que l'installation aura perdu plus de la moitié de son rendement en 2014+23 c'est-à-dire en 2037.

Partie B

On considère l'algorithme ci-dessous :

```
1   VARIABLES
2   u EST_DU_TYPE NOMBRE
3   S EST_DU_TYPE NOMBRE
4   n EST_DU_TYPE NOMBRE
5   DÉBUT ALGORITHME
6   n PREND_LA_VALEUR 0
7   u PREND LA VALEUR 1 900
8   S PREND LA VALEUR 1 900
9   TANT_QUE (S < 20000) FAIRE
10  DÉBUT_TANT_QUE
11  n PREND LA VALEUR n + 1
12  u PREND_LA_VALEUR u × 0,97
13  S PREND_LA_VALEUR S + u
14  FIN_TANT_QUE
15  AFFICHER n
16  FIN_ALGORITHME
```

1. **a.** La ligne 8 sert à initialiser la quantité totale d'énergie produite.

   b. La valeur affichée en exécutant cet algorithme est 12. Cela signifie qu'au bout de 12 ans, la quantité totale d'énergie produite est supérieure à vingt mille kilowattheures, par conséquent la rentabilité financière est assurée.

2. On estime que la durée de vie de l'installation sera d'environ 25 ans.

   Calculons $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{24}$.

   (u_n) étant une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, $u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{24} = u_0\dfrac{1-q^{25}}{1-q}$.

   Par conséquent $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{24} = 1900 \times \dfrac{1-0{,}97^{25}}{1-0{,}97} \approx 33\,758{,}3 \approx 33\,758$ kWh.

   Ce résultat correspond à la quantité d'énergie produite pendant les vingt-cinq ans de l'installation.

   La rentabilité financière est donc assurée.

EXERCICE 2 — **5 points**

Un grand constructeur automobile propose une nouvelle gamme de véhicules électriques équipés de batteries au nickel-cadmium.

Partie A

On s'intéresse à l'autonomie en kilomètres de cette nouvelle gamme de véhicules.
Soit X la variable aléatoire qui à un véhicule tiré au hasard associe son autonomie en km.
On suppose que X suit la loi normale de moyenne $\mu = 104$ et d'écart type $\sigma = 6$.
On arrondira les résultats à 10^{-2} près.

On considère qu'un véhicule est conforme lorsque son autonomie est comprise entre 92 et 116.

Déterminons la probabilité que le véhicule soit déclaré conforme.
À l'aide de la calculatrice, nous obtenons $P(92 \leqslant X \leqslant 116) \approx 0{,}9545$.

Nous pouvons remarquer que $[92\,;\,116]$ correspond à l'intervalle $[\mu - 2\sigma\ ;\ \mu + 2\sigma]$.

Partie B

Les véhicules sont parqués par lots de 75 avant de recevoir leur certificat de conformité.
Soit Y la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 75 véhicules choisis au hasard dans la production associe le nombre de véhicules non-conformes dans cet échantillon.
La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler tout échantillon de 75 véhicules à un échantillon aléatoire prélevé avec remise.

On suppose que la probabilité qu'un véhicule soit non-conforme est $0,05$.

1. La loi de probabilité de Y est une loi binomiale car il s'agit d'une répétition de n séries indépendantes et identiques caractérisées par deux issues de probabilité p et q telles que $p + q = 1$.

Le « succès » est l'évènement : « le véhicule est non conforme » avec la probabilité $p = 0{,}05$ et l'« échec » l'évènement « le véhicule est conforme » avec la probabilité $q = 0{,}95$.

Nous avons donc une loi binomiale de paramètres $(75\,;\ 0{,}05)$ par conséquent $p(Y = k) = \binom{75}{k}(0{,}05)^k(0{,}95)^{75-k}$

2. Calculons la probabilité de l'évènement :

« dans l'échantillon prélevé au hasard, tous les véhicules sont conformes ».

Nous avons donc $k = 0$. $p(Y = 0) = 0{,}95^{75} \approx 0{,}02$.

Partie C

Le constructeur automobile veut juger de l'impact d'une campagne publicitaire menée dans les médias pour la vente de cette nouvelle gamme de véhicules.
Dans un échantillon, considéré comme prélevé au hasard et avec remise, de 1 000 véhicules produits, on constate la vente de 148 véhicules avant la campagne publicitaire.
Sur une même période, après la campagne publicitaire, pour un échantillon de même taille et prélevé dans les mêmes conditions, on constate la vente de 177 véhicules.
Que peut-on en conclure sur la campagne publicitaire ? L' intervalle de confiance avec un niveau de confiance de 95 % est :

$$I = \left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

Avant la campagne publicitaire, la proportion est $p_1 = \dfrac{148}{1000} = 0{,}148$. L'intervalle de confiance au niveau de 95 % est

$$I_1 = \left[0{,}148 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}148(1-0{,}148)}{1000}}\ ;\ 0{,}148 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}148(1-0{,}148)}{1000}}\right] \approx [0{,}126\ ;\ 0{,}170]$$

Après la campagne publicitaire, la proportion est $p_2 = \dfrac{177}{1000}$. L'intervalle de confiance au niveau de 95 %

$$I_2 = \left[0{,}177 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}177(1-0{,}177)}{1000}}\ ;\ 0{,}177 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}177(1-0{,}177)}{1000}}\right] = [0{,}153\ ;\ 0{,}201]$$

Les intervalles n'étant pas disjoints, nous pouvons dire que la campagne n'a pas été efficace.

EXERCICE 3 — 4 points

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Aucune justification n'est attendue. Une bonne réponse apporte 1 point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève de points.
Dans les questions 1. et 2. on considère la fonction f définie sur $]7\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 3x^2 + x + \frac{1}{(x-7)^2}$$

1. Une primitive F de f est donnée par :

a. $\cancel{F(x) = 6x + 1 + \dfrac{2}{(x-7)^3}}$ **b.** $\boxed{F(x) = x^3 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{(x-7)}}$

c. $\cancel{F(x) = 9x^3 + 2x^2 + \dfrac{1}{(x-7)}}$ **d.** $\cancel{F(x) = x^3 + \dfrac{x^2}{2} + \ln(x-7)}$

2. Laquelle des limites suivantes est correcte ?

a. $\cancel{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$ **b.** $\cancel{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

c. $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 7 \\ x > 7}} f(x) = +\infty}$ **d.** $\cancel{\lim\limits_{\substack{x \to 7 \\ x > 7}} f(x) = 154}$

3. Soit $z = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ alors l'écriture exponentielle du conjugué de z est :

a. $\cancel{\overline{z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$ **b.** $\cancel{\overline{z} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$

c. $\cancel{\overline{z} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}$ **d.** $\boxed{\overline{z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}$

4. Un argument de $z = \sqrt{7}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{7}}$ est :

a. $\boxed{\dfrac{\pi}{14}}$ **b.** $\cancel{\dfrac{13\pi}{14}}$

c. $\cancel{-\dfrac{2\pi}{9}}$ **d.** $\cancel{\sqrt{7}}$

EXERCICE 4 — 5 points

Un réservoir contient 1 000 litres d'eau potable.
À la suite d'un incident, de l'eau de mer pénètre dans ce réservoir à raison de 10 litres par minute.
On s'intéresse à la salinité de cette eau, c'est-à-dire au taux de sel (en grammes par litre), qui doit rester inférieure à 3,9 g.L^{-1}.
On modélise la situation en notant s la salinité exprimée en grammes par litre et t le temps écoulé en minutes depuis le début de l'incident.
On suppose que l'évolution de s est représentée par l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \quad y' + 0,01y = 0,39.$$

1. Résolvons l'équation (E).

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par $y(x) = C\mathrm{e}^{-ax} + \dfrac{b}{a}$ où C est une constante quelconque.

$a = 0{,}01$ $b = 0{,}39$ par conséquent $y(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}01t} + \dfrac{0{,}39}{0{,}01}$ d'où $y(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}01t} + 39$ où C est une constante quelconque.

On admet pour la suite qu'en considérant les conditions initiales, la fonction s est définie par

$$s(t) = 39 - 38,88\mathrm{e}^{-0,01t}.$$

2. **a.** Déterminons la salinité de l'eau dans le réservoir avant l'incident c'est-à-dire à $t = 0$.
Calculons $s(0)$. $s(0) = 39 - 38,88\mathrm{e}^{-0{,}01\times 0} = 0{,}12$

b. La fonction s est strictement croissante car la fonction dérivée définie par $x \longmapsto -38{,}88 \times (-0{,}01)\mathrm{e}^{-0{,}01t}$ est une fonction positive.

c. Déterminons la salinité de l'eau du réservoir 60 minutes après le début de l'incident.
$s(60) = 39 - 38,88\mathrm{e}^{-0{,}01\times 60t} \approx 17{,}66$
La salinité de l'eau du réservoir 60 minutes après le début de l'incident est d'environ 17,66 g.L^{-1}.

d. La salinité de l'eau du réservoir si l'on n'intervient jamais tend vers 39 puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}01t} = 0$

3. La salinité doit rester inférieure à 3,9 g.L^{-1}.

De combien de temps le service de surveillance dispose-t-il pour arrêter l'arrivée de l'eau salée afin de limiter l'impact de l'incident ?

Pour ce faire, résolvons $s(t) < 3{,}9$.

$$39 - 38{,}88\mathrm{e}^{-0{,}01t} < 3{,}9$$
$$-38{,}88\mathrm{e}^{-0{,}01t} < 3{,}9 - 39$$
$$38{,}88\mathrm{e}^{-0{,}01t} > 35{,}1$$
$$38{,}88\mathrm{e}^{-0{,}01t} > 35{,}1$$
$$\mathrm{e}^{-0{,}01t} > \dfrac{35{,}1}{38{,}88}$$

$$\begin{aligned}\ln \mathrm{e}^{-0,01\,t} &> \ln\left(\frac{35,1}{38,88}\right)\\ -0,01\,t &> \ln\left(\frac{35,1}{38,88}\right)\\ t &< \frac{\ln\left(\dfrac{35,1}{38,88}\right)}{-0,01}\\ t &< -100\ln\left(\frac{35,1}{38,88}\right)\end{aligned}$$

$$-100\ln\left(\frac{35,1}{38,88}\right) \approx 10,228$$

$10,228$ min $= 10$ min $+ 0,228 \times 60$ s ≈ 10 min $13,7$ s.

Le service de surveillance dispose pour arrêter l'arrivée de l'eau salée afin de limiter l'impact de l'incident d'environ 10 minutes et 14 secondes.