Durée : 4 heures

∽ Corrigé du baccalauréat STI 2D/STL ∾ Nouvelle-Calédonie 19 novembre 2015

EXERCICE 1 **6 points**

Jusqu'à présent Pierre n'a encore jamais réussi à économiser un seul euro. Pour le responsabiliser dans la gestion de son argent de poche, ses parents décident de lui verser 30 euros tous les premiers du mois.
Pierre décide que pour s'offrir le téléphone de ses rêves qui coûte 150 euros, il ne dépensera chaque mois que 20 % de son capital accumulé.
Le premier versement lui a été fait au 1^er^ janvier 2015.

1. À la fin du mois, Pierre a dépensé 20 % des 30 euros ; il lui reste donc 80 % de cette somme soit : $30 \times 0,80 = 24$ euros.
2. **a.** À la fin du 1^er^mois il lui restait 24 euros auxquels s'ajoutent le lendemain les 30 euros mensuels ; $u_2 = 24 + 30 = 54$ (euros).

   b. S'il lui reste u_n il en dépense 20 %, donc il lui reste $0,80u_n$ auxquels s'ajoutent les 30 euros, donc $u_{n+1} = 0,8u_n + 30$

   c.

```
Initialisation
        Affecter à i la valeur 1
        Affecter à u la valeur 30
Traitement
    Tant que i < 4
        Affecter à u la valeur 0,8 ∗ u + 30
        Affecter à i la valeur i + 1
    Fin Tant que
Sortie
        Afficher u
```

3.

n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
u_n	148,62	148,89	149,12	149,29	149,43	149,55	149,64	149,71	149,77	149,81

   La suite semble croissante et se rapprocher de 150.

4. Il faut rentrer comme valeur de p : 0,10.
5. On peut essayer de dépenser moins de 20 % par mois : avec une dépense de 16 % on trouve qu'au bout de 12 mois Pierre disposera de 154,71 €. (On utilise l'algorithme A avec un coefficient de 0,84 au lieu de 0,8.)

EXERCICE 2 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent aucun point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante choisie.

1. La négation de la phrase suivante « toute solution de l'équation (E) est strictement supérieure à 3 » :

- **a.** toute solution de (E) est inférieure ou égale à 3
- **b.** aucune solution de (E) n'est strictement supérieure à 3
- **c.** au moins une solution de (E) est inférieure ou égale à 3 VRAIE
- **d.** une seule solution de (E) est inférieure ou égale à 3

2. Soient Z_1 et Z_2 les nombres complexes définis par : $Z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $Z_2 = 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$. Une forme exponentielle du quotient $\dfrac{Z_1}{Z_2}$ est :

- **a.** $\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$
- **b.** $-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$
- **c.** $-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$
- **d.** $\frac{2}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ VRAIE

3. On considère l'équation différentielle $y' + 5y = 3$, où y désigne une fonction dérivable sur l'ensemble des réels. La solution f de cette équation telle que $f(0) = 0$ est la fonction de la variable x vérifiant pour tout réel x :

- **a.** $f(x) = +0,6\mathrm{e}^{5x} + 0,6$
- **b.** $f(x) = -0,6\mathrm{e}^{-5x} + 0,6$ VRAIE
- **c.** $f(x) = 0$
- **d.** $f(x) = -3\mathrm{e}^{-5x} + 3$

4. On considère la production d'une usine de composants électroniques. On admet que la durée de fonctionnement sans panne (en années) de ces composants peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,1$.

La probabilité qu'un composant pris au hasard, soit tombé en panne au bout 6 ans est, au centième près :

a. 1,6 **b.** 0,55 **c.** 0,45 **d.** 0,05

$P(X \geqslant 6) \approx 0,55$.

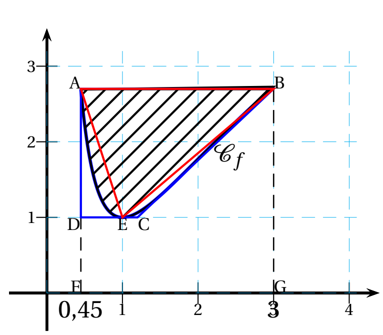
EXERCICE 3 **4 points**

1. a. On a $P(X > 102) = P(X \geqslant 100) - P(100 \leqslant X \leqslant 102) = 0,5 - P(100 \leqslant X \leqslant 102) \approx 0,0062$. C'est la probabilité que l'huile déborde lorsque la machine remplit un bidon.

b. Ne sont pas commercialisés les bidons contenant moins de 98 litres d'huile. Or
$P(X < 98) = P(X \leqslant 100) - P(98 \leqslant X \leqslant 100) = 0,5 - P(98 \leqslant X \leqslant 100) \approx 0,0062$.
Donc 0,62 % des bidons ne pourront être commercialisés.

2. Il y a assez de bidons pour que l'on puisse considérer que le prélèvement de 30 bidons soit considéré comme à un tirage avec remise de 30 bidons avec une probabilité de 0,006.
Y est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,006$.
La calculatrice donne $P(Y \leqslant 1) \approx 0,9860$.

EXERCICE 4 **6 points**



1. Avec la précision du dessin soient les points :
   A(0,45 ; 2,7) ; B(3 ; 2,7) ; C(1,2 ; 1) ; D(0,45 ; 1) et E(1 ; 1).
   On a aire (ABC) $= \dfrac{1,65 \times 1,7}{2} = 1{,}402\,5$.
   aire (ABCD) $= \dfrac{2,55 + 0,75}{2} \times 1,7 = 2,805$.
   Comme l'aire de l'aileron est comprise entre l'aire du triangle et celle du trapèze, on peut estimer cette aire à environ 2,5 carreaux.
2. On lit $f(1) = 1$ et $f'(1) = 0$.
3. La fonction f est donc définie par $f(x) = \dfrac{4}{x} - 3 + 4\ln(x)$, d'où :
   - $f(1) = \dfrac{4}{1} - 3 + 4\ln(1) = 4 - 3 = 1$;
   - $f'(x) = -\dfrac{4}{x^2} + 4\dfrac{1}{x}$, d'où $f'(1) = -4 + 4 = 0$.

   Conclusion : le choix de $a = 4$ et $b = -3$ répond au problème posé.
4. La fonction F est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :
   $F'(x) = 4\ln(x) + \dfrac{4x+4}{x} - 7 = 4\ln(x) + 4 + \dfrac{4}{x} - 7 = \dfrac{4}{x} - 3 + 4\ln(x) = f(x)$.
5. On a vu que $f'(x) = -\dfrac{4}{x^2} + 4\dfrac{1}{x} = \dfrac{4x-4}{x^2}$.
   Comme $x^2 \geqslant 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $4x - 4$.
   - $4x - 4 > 0$ si $x > 1$, donc f est croissante pour $x > 1$;
   - $4x - 4 < 0$ si $x < 1$, donc f est décroissante si $x < 1$.

   $f(1)$ est donc le minimum de la fonction et $f(1) = 1$.
   Le minimum de f étant positif, la fonction f est positive.
   L'aire de l'aileron est donc égale à l'aire du trapéze ABGH et de l'aire de la surface limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites verticales contenant respectivement A et B d'équations respectives $x = 0,45$ et $x = 3$. Or cette dernière aire est égale en unités d'aire à l'intégrale de f entre $x = 0,45$ et $x = 3$.
   On a $f(3) = \dfrac{4}{3} - 3 + 4\ln(3) = 4\ln 3 - \dfrac{5}{3}$;
   $f(0,45) = f\left(\frac{9}{20}\right) = \dfrac{4}{\frac{9}{20}} - 3 + 4\ln\left(\frac{9}{20}\right) = \dfrac{80}{9} - 3 + 4\ln\left(\frac{9}{20}\right) = \dfrac{53}{9} + 4\ln\left(\frac{9}{20}\right)$.
   L'aire de l'aileron est donc égale à :
   $\dfrac{f(0,45) + f(3)}{2} \times (3 - 0,45) - \displaystyle\int_{0,45}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{f(0,45) + f(3)}{2} \times (3 - 0,45) - [F(x)]_{0,45}^{3} =$
   $\dfrac{f(0,45) + f(3)}{2} \times (3 - 0,45) - F(3) + F(0,45) \approx 2,555$ unités d'aire.
   Comme l'unité sur chaque axe est 10 cm, l'unité d'aire est égale à 100 cm^2, donc l'aire au cm^2 près de l'aileron est 255 cm^2.