∽ Corrigé du baccalauréat STI2D ∾

Épreuve d'enseignement de spécialité

Nouvelle-Calédonie 26 octobre 2022

Physique-Chimie et Mathématiques

EXERCICE 1 2 points

Dans la suite de l'exercice, on modélise la vitesse du parachutiste $\left(\text{en m}\cdot\text{s}^{-1}\right)$, en fonction du temps t écoulé (en seconde) depuis le largage, par la fonction v, solution de l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -0,16v(t) + 9,81.$$

On suppose que $v(0) = 0$.

1. Démontrons que $v(t) = \dfrac{981}{16}\left(1 - \mathrm{e}^{-0,16t}\right)$, pour t réel positif.

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par

$y(x) = C\mathrm{e}^{-ax} + \dfrac{b}{a}$ où C est une constante quelconque.

$a = 0,16$ $b = 9,81$ par conséquent sur $[0\,;\,+\infty[$ $v(t) = C\mathrm{e}^{-0,16t} + \dfrac{9,81}{0,16}$

c'est-à-dire $v(t) = C\mathrm{e}^{-0,16t} + \frac{981}{16}$ où C est une constante quelconque.

Déterminons C à l'aide de la condition initiale $v(0) = 0$.

$$v(0) = C\mathrm{e}^{-0,16\times 0} + \frac{981}{16} = 0 \iff C + \frac{981}{16} = 0 \qquad C = -\frac{981}{16}$$

Par conséquent

$$v(t) = -\frac{981}{16}\mathrm{e}^{-0,16t} + \frac{981}{16} = \frac{981}{16}\left(1 - \mathrm{e}^{-0,16t}\right).$$

La brochure commerciale présentant le saut en parachute indique que le parachutiste atteint la vitesse de 200 *km·h*$^{-1}$ *en moins de quarante secondes.*

2. Convertissons 200 km·h^{-1} en mètre par seconde $\left(\text{en m}\cdot\text{s}^{-1}\right)$.

200 km·h^{-1} est équivalent en mètre par seconde à $\dfrac{200\,000}{3\,600} \approx 55,55$

3. Valider ou infirmer l'indication de la brochure.

Pour ce faire, déterminons le temps t pour lequel la vitesse est égale à 55,55.

Résolvons

$$\begin{aligned}
\frac{981}{16}\left(1 - \mathrm{e}^{-0,16t}\right) &= 55,55\\
1 - \mathrm{e}^{-0,16t} &= \frac{55,55\times 16}{981}\\
\mathrm{e}^{-0,16t} &= 1 - \frac{55,55\times 16}{981}\\
-0,16t &= \ln\left(1 - \frac{55,55\times 16}{981}\right)\\
t &= -\frac{\ln\left(1 - \frac{55,55\times 16}{981}\right)}{0,16}\\
t &\approx 14,78
\end{aligned}$$

La brochure indique un temps largement supérieur au temps nécessaire pour atteindre les 200 km$\cdot$ h^{-1}.

EXERCICE 3 COMMUN À TOUS LES CANDIDATS **4 points**

Loi de refroidissement de Newton

Dans cet exercice, seulement 4 questions au choix parmi les 6 questions proposées sont à traiter.

Toutes ces questions sont indépendantes les unes des autres.
Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est correcte.
Pour les quatre questions traitées, indiquer sur la copie l'affirmation choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Chaque réponse correcte rapporte un point.
Une réponse incorrecte, une réponse multiple, une absence de réponse, ne rapportent ni n'enlèvent de point.

La loi de refroidissement de Newton indique que la vitesse de refroidissement d'un matériau est proportionnelle à la différence entre la température θ (en degré Celsius) de ce matériau à l'instant t (en minute) et la température A constante de l'air ambiant.
Cela se traduit par la relation

$$\theta'(t) = \alpha(\theta(t) - A),$$

où θ est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ modélisant la température du matériau en fonction du temps t, en prenant comme origine du temps l'instant où la pièce en acier est mise à refroidir.
La valeur du coefficient α, qui est négatif, dépend du matériau.
Une pièce en acier, initialement à la température de 600° C, est mise à refroidir à l'air libre dans une pièce à 20° C. Pour cet acier, α vaut $-0,1$.

1. La fonction θ est solution de l'équation différentielle :

   a. $\cancel{y = -0,1y' + 2}$ **b.** $\cancel{y = -0,1y' + 20}$

   c. $y' = -0,1y + 2$ **d.** $\cancel{y' = 0,1y + 20}$

Pour l'ensemble des questions suivantes, on admet que, sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, la fonction θ est définie par :

$$\theta(t) = 580\text{e}^{-0,1t} + 20, \text{ d'où } \quad \theta'(t) = -58\text{e}^{-0,1t}$$

2. La pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction θ au point d'abscisse 10 vaut :

   a. $-\dfrac{58}{\text{e}}$ **b.** $\cancel{580\text{e}^{-1} + 20}$

   c. $\cancel{-\dfrac{58}{\text{e}} + 20}$ **d.** $\cancel{\dfrac{580}{\text{e}}}$

   Nous remplaçons t par 10 dans $\theta'(t)$

3. Sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, la fonction θ est :

a. ~~croissante~~ **b.** décroissante
c. croissante ~~puis décroissante~~ **d.** ~~constante~~

La fonction θ' est strictement négative sur $[0\ ;\ +\infty[$

4. La limite en $+\infty$ de $\theta(t)$ est :

a. 20 **b.** ~~580~~
c. $\cancel{-\infty}$ **d.** $\cancel{+\infty}$

$$\lim_{t\to+\infty}\theta(t) = \lim_{t\to+\infty} 580\mathrm{e}^{-0,1t} + \lim_{t\to+\infty} 20 = 0 + 20 = 20$$

La pièce peut être manipulée lorsque sa température devient inférieure à 40 ° C.
Pour déterminer la durée minimale d'attente (en minutes), à compter de l'instant où elle est mise à refroidir, on veut mettre en place un algorithme de balayage, écrit en langage Python.

```
1   from math import exp
2
3   def duree_d_attente ( ) :
4       t = 0
5       Temperature = 600
6       .........
7           t = t + 1
8           Temperature = 580 * exp(- 0,1*t) + 20
9       return t
```

5. Pour que la valeur renvoyée par la fonction **duree_d_attente** soit la valeur entière minimale de la durée d'attente, la ligne 6 contient :

a. ~~while t > 40 :~~ **b.** while Temperature > 40 :
c. while ~~Temperature < 40 :~~ **d.** for i in ~~range(Temperature) :~~

6. L'inéquation $\theta(t) < 40$, d'inconnue t, admet comme ensemble solution sur $[0\ ;\ +\infty[$:

a. l'interva~~lle $\left[0\ ;\ 10\ln\left(\frac{1}{29}\right)\right]$~~ **b.** l'intervalle $\left[-10\ln\left(\frac{1}{29}\right)\ ;\ +\infty\right[$

c. l'interva~~lle $\left[0\ ;\ \dfrac{10}{29}\right]$~~ **d.** l'ensemble ~~vide (pas de solution)~~

$$\begin{aligned} 580\mathrm{e}^{-0,1t} + 20 &< 40\\ 580\mathrm{e}^{-0,1t} &< 20\\ \mathrm{e}^{-0,1t} &< \frac{20}{580}\\ \mathrm{e}^{-0,1t} &< \frac{1}{29}\\ -0,1t &< \ln\left(\frac{1}{29}\right)\\ t &> -10\ln\left(\frac{1}{29}\right)\end{aligned}$$