∽ Corrigé du baccalauréat STI2D ∾

Épreuve d'enseignement de spécialité
Métropole Antilles–Guyane septembre 2022
Physique-Chimie et Mathématiques

EXERCICE 1 **4 points**

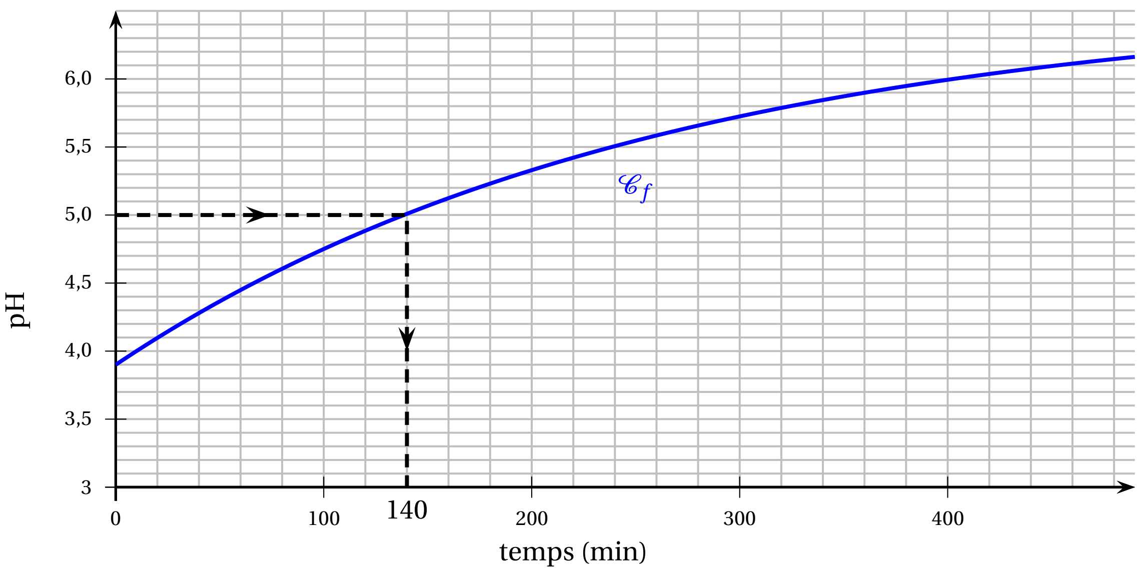
Physique-Chimie et Mathématiques

Une horloge au jus d'orange

Partie B : étude mathématique

On note t le temps, exprimé en minute, écoulé depuis la mise en fonctionnement de la pile au jus d'orange.
À l'aide d'une étude expérimentale, la valeur du pH en fonction du temps peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = 6,571 - 2,671\mathrm{e}^{-\frac{t}{261}}.$$



1. $f(0) = 6,571 - 2,671\mathrm{e}^{-\frac{0}{261}} = 6,571 - 2,671\mathrm{e}^{0} = 6,571 - 2,671 = 3,9$.
   C'est le pH initial.
2. a. On voit sur le graphique que 5 a pour antécédent 140. Or $140 = 2 \times 60 + 20$.
   Le pH est à 5 au bout de 2 heures 20 minutes.

   b. Dans $[0\,;\,+\infty[$, $f(t) = 5 \iff 6,571 - 2,671\mathrm{e}^{-\frac{t}{261}} = 5 \iff 6,571 - 5 = 2,671\mathrm{e}^{-\frac{t}{261}} \iff 1,571 = 2,671\mathrm{e}^{-\frac{t}{261}} \iff \dfrac{1,571}{2,671} = \mathrm{e}^{-\frac{t}{261}}$, puis par croissance de la fonction logarithme népérien ; d'où $\ln\left(\dfrac{1,571}{2,671}\right) = -\dfrac{t}{261}$ et enfin $t = -261\left(\dfrac{1,571}{2,671}\right) \approx 138,52$.

Donc le pH est à 5 au bout de 2 heures 18 minutes et $0,52 \times 60 = 31,2$ s donc environ 2 h 19 min., soit une minute de moins que le résultat trouvé graphiquement.

3. On sait que $\lim\limits_{t \to +\infty} -\dfrac{t}{261} = -\infty$, donc $\mathrm{e}^{-\frac{t}{261}} \lim\limits_{t \to +\infty} = 0$.
On a donc $\lim\limits_{t \to +\infty} 6,571 - 2,671 \times 0 = 6,571$. Ceci est accord avec les valeurs relevées lors de l'expérience.

EXERCICE 3 **(4 points)**

(mathématiques)

QUESTION 1

Pour chacune des deux questions suivantes, une seule des quatre réponses est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un demi-point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse ne rapportent, ni n'enlèvent aucun point.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1. $\ln(35) = \ln(5 \times 7) = \ln 5 + \ln 7$.

2. $\mathrm{e}^{20} = \mathrm{e}^{5+15} = \mathrm{e}^5 \times \mathrm{e}^{15}$.

QUESTION 2

1. On a $f(0) = 28 \ln 1 + 70 = 70$.

2. Il faut résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,100]$, l'équation $f(t) = 185$, soit
$28 \ln(x+1) + 70 = 185 \iff 28 \ln(x+1) = 115 \iff \ln(x+1) = \dfrac{115}{28} \iff x+1 = \mathrm{e}^{\frac{115}{28}} \iff x = \mathrm{e}^{\frac{115}{28}} - 1 \approx 59,77$, soit 60 (m) au mètre près.

QUESTION 3

La température d'un four, exprimée en degré Celsius, en fonction du temps t, exprimé en minute, est modélisée par une fonction f définie et dérivable sur$[0\,;\,+\infty[$, solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,2y + 44$.

1. • On sait que les solutions de l'équation $y' = -0,2y$ sur $[0\,;+\infty[$ sont les fonctions du type $t \longmapsto \alpha \mathrm{e}^{-0,2t}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$;
• Une fonction constante $y = k$ est solution de l'équation différentielle si $y' = 0 = -0,2k + 44 \iff 44 = 0,2k \iff k = 220$.
Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions :

$$t \longmapsto \alpha \mathrm{e}^{-0,2t} + 220,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

2. Puisque la température est modélisée par la fonction f, définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = \alpha \mathrm{e}^{-0,2t} + 220$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et que
$f(0) = 25 \iff \alpha \mathrm{e}^0 + 220 = 25 \iff \alpha + 220 = 25 \iff \alpha = -195$, on a donc :

$$f(t) = 220 - 195\mathrm{e}^{t}.$$

QUESTION 4

On pose $z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et $z' = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

1. • On a $|z|^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2 = 3 + 1 = 4 = 2^2 \Rightarrow |z| = 2$;
   • Donc $z = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{-1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{-\pi}{6}\right) = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.
2. Tout d'abord $z' = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$. Donc
   $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{17\pi}{12}\right)} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$.

QUESTION 5

Il faut trouver le temps t au bout duquel :
$N(t) = \dfrac{N(0)}{2} = N(0)\mathrm{e}^{-0,086t} \iff \dfrac{1}{2} = \mathrm{e}^{-0,086t} \iff \ln\dfrac{1}{2} = -0,086t \iff -\ln 2 = -0,086t \iff$
$t = \dfrac{\ln 2}{0,086}$.
La calculatrice donne $\dfrac{\ln 2}{0,086} \approx 8,059$, soit 8 jours au jour près.

QUESTION 6

1. Sur $\mathbb{R}$, on a :
   $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$;
   $f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$;
   $f''(x) = -\sin(x) - \cos(x)$.
   Donc $f(x) + f''(x) = 0 \iff f$ est solution d' équation différentielle $y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit la fonction g définie par : $g(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.
   D'après le formulaire :
   $g(x) = \sqrt{2}\left(\cos(x)\cos\frac{\pi}{4} + \sin(x)\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos(x) \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin(x) \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$
   $\cos(x) \times \frac{2}{2} + \sin(x) \times \frac{2}{2} = \cos(x) + \sin(x) = f(x)$.
   On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.