Corrigé du baccalauréat STI2D et STL spécialité SPCL
Métropole – 7 septembre 2017

EXERCICE 1 — 4 points

1. On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.

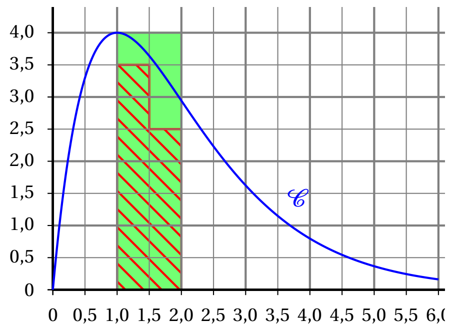
   On pose $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Un encadrement de I est :

   a. $6 < I < 8$

   b. $1 < I < 2$

   c. $\boxed{3 < I < 4}$

   d. $13 < I < 16$



   Explications

   Sur l'intervalle $[1\,;\,2]$, la fonction f est positive, donc l'intégrale I est égale à l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

   Le polygone intérieur au domaine hachuré en rouge a une aire de 3 qui est inférieure à I.

   Le polygone extérieur au domaine colorié en vert a une aire de 4 plus grande que I.

2. La fonction g est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = (-2x+1)\ln(x)+5$.

   La limite de cette fonction g en $+\infty$ est égale à :

   a. $+\infty$ **b.** $\boxed{-\infty}$ **c.** 0 **d.** 5

   Explications

   $$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(-2x+1) = -\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty\end{array}\right\}\ \text{donc}\ \lim_{x\to+\infty}(-2x+1)\ln(x) = -\infty\ \text{et donc}\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

3. La suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 4$ et de raison $q = 0{,}5$.

   La somme des 9 premiers termes de cette suite est égale à :

   a. $4\times 0{,}5^8$ **b.** $\dfrac{1-0{,}5^9}{1-0{,}5}$ **c.** $\boxed{8\times\left(1-0{,}5^9\right)}$ **d.** 6,9

   Explications

   La somme$S$ des premiers termes d'une suite géométrique est donnée par :

   $S = \text{premier terme}\times\dfrac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$, ce qui donne ici : $v_0\times\dfrac{1-q^9}{1-q} = 4\dfrac{1-0{,}5^9}{1-0{,}5} = 8\left(1-0{,}5^9\right)$.

4. La suite (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 300$ et de raison $q = 1{,}05$. L'algorithme qui calcule et affiche tous les termes strictement inférieurs à 405 de cette suite est :

a. **Variables**
n : un nombre entier naturel
u : un nombre réel
Initialisation
n prend la valeur 0
u prend la valeur 300
Traitement
Tant que $n < 450$
Afficher u
n prend la valeur $n+1$
u prend la valeur $300 \times 1{,}05^n$
Fin Tant que

b. **Variables**
u : un nombre réel
Initialisation
u prend la valeur 300
Traitement
Tant que $u < 450$
u prend la valeur $1{,}05 \times u$
Fin Tant que
Sortie
Afficher u

c. $\boxed{}$
Variables
u : un nombre réel
Initialisation
u prend la valeur 300
Traitement
Tant que $u < 450$
Afficher u
u prend la valeur $1{,}05 \times u$
Fin Tant que

d. **Variables**
n : un nombre entier naturel
u : un nombre réel
Initialisation
n prend la valeur 0
u prend la valeur 300
Traitement
Tant que $u < 450$
n prend la valeur $n+1$
u prend la valeur $1{,}05 \times u$
Fin Tant que
Sortie
Afficher u

Explications
L'algorithme doit afficher tous les termes de la suite, donc l'affichage doit se faire à l'intérieur de la boucle « Tant que ». On peut donc éliminer les algorithmes **b.** et **d.**
On peut éliminer l'algorithme **a.** car la condition sur la boucle porte sur n alors qu'on veut que ce soit u qui reste inférieur à 450. Le bon algorithme est le **c.**

EXERCICE 2 — 6 points

Le stimulateur cardiaque est un appareil destiné à certaines personnes dont le rythme du cœur est devenu trop lent. Implanté sous la peau, l'appareil envoie des impulsions électriques régulières au cœur lorsque le rythme cardiaque est insuffisant.
Un stimulateur cardiaque est constitué de deux composants : un condensateur de capacité C égale à 4×10^{-7} farad, et un conducteur ohmique de résistance R égale à 2×10^{6} ohms.
Une fois le condensateur chargé, la tension à ses bornes est égale à 5,6 volts. Il se décharge ensuite dans le conducteur ohmique.

Partie A

La tension u, en volts, aux bornes du condensateur est une fonction du temps t, en secondes. On admet que $u(0) = 5{,}6$ et que cette fonction u, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, vérifie pour tout nombre t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ la relation :

$$u'(t) + \frac{1}{RC} \times u(t) = 0.$$

1. **a.** D'après le texte, $C = 4 \times 10^{-7}$ et $R = 2 \times 10^{6}$ donc $RC = 8 \times 10^{-1}$ et donc $\dfrac{1}{RC} = 1{,}25$.
Donc u est solution de l'équation différentielle $y' + 1{,}25y = 0$.
b. Une équation différentielle de premier ordre du type $y' + ay = 0$ a pour solutions les fonctions f définies par $f(t) = k\,\mathrm{e}^{-at}$ où k est un réel quelconque.
On en déduit que les solutions de l'équation différentielle $y' + 1{,}25y = 0$ sont les fonctions u définies par $u(t) = k\,\mathrm{e}^{-1{,}25t}$, où k est un réel quelconque.

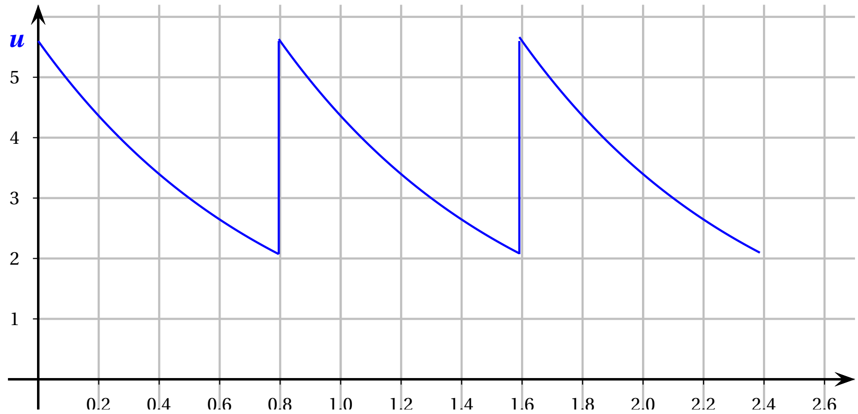
c. $u(t) = k\,\mathrm{e}^{-1,25t}$ et $u(0) = 5,6$ donc $k\,\mathrm{e}^0 = 5,6 \iff k = 5,6$.
Donc u est définie par $u(t) = 5,6\,\mathrm{e}^{-1,25t}$.

2. a. $u(t) = 5,6\,\mathrm{e}^{-1,25t}$ donc $u'(t) = 5,6 \times (-1,25)\,\mathrm{e}^{-1,25t} = -7\,\mathrm{e}^{-1,25t} < 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
La fonction u est donc strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. Ce résultat était prévisible car la fonction u représente la tension aux bornes d'un condensateur et on sait que cette tension décroit avec le temps.

Partie B

En réalité, lorsque la tension u aux bornes du condensateur a perdu 63 % de sa valeur initiale $u(0)$, le stimulateur cardiaque envoie une impulsion électrique au cœur, ce qui provoque un battement. On considère que le condensateur se recharge instantanément et que la tension mesurée à ses bornes est à nouveau égale à 5,6 volts.



1. a. Si la tension perd 63 % de sa valeur, il en reste 37 % et $5,6 \times \dfrac{37}{100} = 2,02$.
Donc la tension aux bornes du condensateur qui déclenche l'envoi d'une impulsion électrique au cœur est de 2,072 volts.

b. On résout dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'équation : $5,6\,\mathrm{e}^{-1,25t} = 2,072$:
$5,6\,\mathrm{e}^{-1,25t} = 2,072 \iff \mathrm{e}^{-1,25t} = \dfrac{2,072}{5,6} \iff \mathrm{e}^{-1,25t} = 0,37 \iff -1,25t = \ln(0,37) \iff$
$t = -\dfrac{\ln(0,37)}{1,25}$ donc $t \approx 0,7954$

c. Il faudra donc déclencher l'envoi d'une impulsion électrique environ toutes les 0,8 secondes.

2. Chez l'adulte en bonne santé, le pouls au repos se situe entre 50 et 80 pulsations par minute.
On admet que le stimulateur cardiaque d'un patient souffrant d'insuffisance envoie une impulsion électrique au cœur toutes les 0,8 secondes.
On cherche combien d'impulsions seront émises en une minute donc en 60 secondes : $\dfrac{60}{0,8} = 75$. Envoyer une impulsion toutes les 0,8 secondes entraîne 75 pulsations par minute, ce qui correspond au rythme d'un adulte en bonne santé.

EXERCICE 3 — 5 points

Partie A

Dans le plan complexe muni d'une repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, on représente les extrémités des pales d'une éolienne par le point A de coordonnées $(0\,;\,3)$ et par les points B et C d'affixes respectives :
$z_{\mathrm{B}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{C}} = 3\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

1. Soit z_{A} l'affixe du point A.

a. La forme algébrique de z_{A} est $3\,\text{i}$.

b. La forme exponentielle de z_{A} est $3\,\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$.

2. $z_{\text{B}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}\,\text{i}$ donc $|z_{\text{B}}| = \left|\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}\,\text{i}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{27}{4} + \dfrac{9}{4}} = \sqrt{9} = 3$

$z_{\text{B}} = 3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\,\text{i}\right)$

On cherche θ tel que $\cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = -\dfrac{1}{2}$; donc $\theta = -\dfrac{\pi}{6} + k \times 2\pi$ où k entier relatif.

L'écriture exponentielle de z_{B} est donc $3\,\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}$.

3. On admet que lorsque l'hélice tourne d'un angle de $\dfrac{\pi}{2}$ radians dans le sens direct, les points A, B et C sont transformés respectivement en A′, B′ et C′ tels que : A′ a pour affixe $z_{\text{A}'} = z_{\text{A}} \times \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$, B′ a pour affixe $z_{\text{B}'} = z_{\text{B}} \times \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$, et C′ a pour affixe $z_{\text{C}'} = z_{\text{C}} \times \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$.

Donc $z_{\text{C}'} = z_{\text{C}} \times \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}} = 3\,\text{e}^{-\text{i}\frac{5\pi}{6}} \times \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}} = 3\,\text{e}^{\text{i}\left(-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)} = 3\,\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

Partie B

La durée de vie, en jours, d'un des composants électroniques d'une éolienne est modélisée par une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}002$.

1. La durée de vie moyenne d'un composant de ce type est $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = 500$ jours.

2. **a.** On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 0{,}002\,\text{e}^{-0{,}002x}$.

Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = -\,\text{e}^{-0{,}002x}$.

$F'(x) = -0{,}002 \times \left(-\,\text{e}^{-0{,}002x}\right) = 0{,}002\,\text{e}^{-0{,}002x} = f(x)$ donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

b. On rappelle que, pour tout nombre réel de $[0\,;\,+\infty[$, $P(T \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\,\text{d}x$.

On a donc $P(T \leqslant t) = 1 - \text{e}^{-0{,}002t}$.

Le fabricant affirme : « la probabilité que la durée de vie du composant soit supérieure à 100 jours est d'au moins 0,8. »

$P(T > 100) = 1 - P(T \leqslant 100) = 1 - \left(1 - \text{e}^{-0{,}002\times 100}\right) = \text{e}^{-0{,}2} \approx 0{,}82 > 0{,}8$

On peut donc dire que le fabricant a raison.

EXERCICE 4 — 5 points

L'entreprise COFRUIT fabrique de la confiture de fruits, qu'elle conditionne en pots. Il est indiqué 680 grammes de confiture sur l'étiquette du pot. En fin de chaîne de remplissage, les pots sont pesés et ceux dont la masse de confiture est strictement inférieure à 675 grammes ne sont pas commercialisés.

Partie A

Après remplissage, la masse de confiture dans un pot est modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 680$ et d'écart-type $\sigma = 2{,}65$.

1. La probabilité que la masse de confiture d'un pot, pris au hasard dans la production, soit comprise entre 677 grammes et 683 grammes est : $P(677 \leqslant X \leqslant 683) \approx 0{,}742$.

2. Un pot est non commercialisé si la masse de confiture est inférieure à 675 grammes donc la probabilité qu'un pot pris au hasard dans la production soit commercialisé est $P(X \geqslant 675) \approx 0{,}970$.

Partie B

Dans cette partie, on considère qu'une machine de remplissage de pots est bien réglée lorsque la proportion théorique de pots non commercialisables est inférieure ou égale à 3 %.
On s'intéresse à la production journalière de pots remplis par cette machine.

1. Lors d'un contrôle de qualité, il est relevé que, sur un échantillon de 200 pots, 8 ne sont pas commercialisables.
   $n = 200 \geqslant 30$; $p = 0{,}03$ donc $np = 6 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 194 \geqslant 5$
   Les conditions sont vérifiées pour que l'on établisse un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la proportion de pots non commercialisables :
   $$\left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] =$$
   $$\left[0{,}03 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}03 \times 0{,}97}{200}}\ ;\ 0{,}03 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}03 \times 0{,}97}{200}}\right] \approx [0{,}006\ ;\ 0{,}054]$$
   La fréquence de pots non commercialisables dans l'échantillon est $f = \dfrac{8}{200} = 0{,}04$.
   Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation donc il n'y a pas de raison de modifier le réglage de la machine.
2. On rappelle dans cette question que $\mu = 680$ et $\sigma = 2{,}65$.
   On suppose que la machine est bien réglée. L'entreprise décide de vendre les pots de confiture par lots de 2. Les lots de moins de 1 350 grammes de confiture sont jugés non conformes.
   On admet que la masse de confiture, en grammes, d'un lot de 2 pots est une variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance 2μ et d'écart-type $\sqrt{2} \times \sigma$.
   a. La variable aléatoire Y suit la loi normale d'espérance $2\mu = 1\,360$ et d'écart-type $\sqrt{2} \times \sigma \approx 3{,}748$.
   Donc $P(Y \leqslant 1\,350) \approx 0{,}004$.
   b. D'après les questions précédentes, on peut estimer qu'il y a une proportion de lots de 2 pots non commercialisables de 0,4 % bien plus faible que la proportion de pots non commercialisables de 3 % quand on les considère individuellement.
   Il est donc plus intéressant pour l'entreprise COFRUIT de vendre ses pots de confiture par lots de 2.