∽ Corrigé du baccalauréat STI2D et STL ∾
Métropole-La Réunion – 19 juin 2018

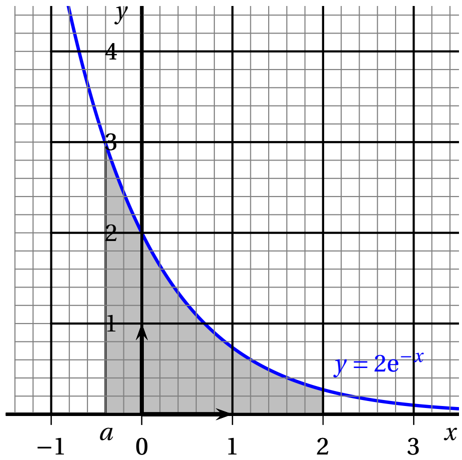
Exercice 1 **4 points**

1. Le plan complexe est muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$. On considère le point A de coordonnées $\left(-4\sqrt{2}\,;\,4\sqrt{2}\right)$.
Une écriture exponentielle de l'affixe du point A est :

a. $8\,e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ **b.** $\boxed{8\,e^{i\frac{3\pi}{4}}}$ **c.** $4\sqrt{2}\,e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ **d.** $4\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$

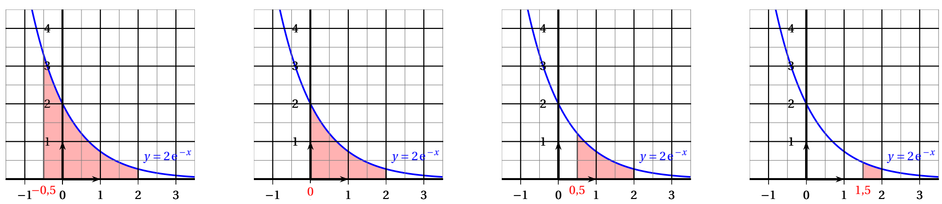
> $z_A = -4\sqrt{2}+4i\sqrt{2}$ donc $|z_A|^2 = \left(-4\sqrt{2}\right)^2+\left(4\sqrt{2}\right)^2 = 32+32 = 64$; donc $|z_A| = 8$
> $z_A = 8\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; or $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $\dfrac{3\pi}{4}$ est un argument de z_A.

2. Sur le graphique ci-dessous, l'aire grisée est délimitée par la courbe d'équation $y = 2\,e^{-x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = 2$, où $a < 2$..



L'aire grisée a une valeur strictement comprise entre 0,5 et 1 unité d'aire lorsque a est égal à :

a. $-0{,}5$ **b.** 0 **c.** $\boxed{0{,}5}$ **d.** $1{,}5$



> En regardant les 4 graphiques correspondant aux 4 valeurs de a proposées comme réponse, on voit que dans les deux premiers, l'aire est trop grande, et que dans le quatrième, elle est trop petite.

3. On considère l'équation différentielle $y' + 2y = 6$ où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note f l'unique solution de cette équation différentielle vérifiant $f(0) = 5$.
La valeur de $f(2)$ est :

a. $\boxed{2\,e^{-4}+3}$ **b.** $2\,e^{4}+3$ **c.** $5\,e^{-4}+3$ **d.** $5\,e^{4}+3$

> D'après le cours, cette équation différentielle a pour solution les fonctions f définies par $f(t) = k\,e^{-2t}+3$. Si $f(0) = 5$, alors $k = 2$, donc $f(t) = 2\,e^{-2t}+3$ et donc $f(2) = 2\,e^{-4}+3$.

4. On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$.
La primitive F de f sur $]0\,;\,+\infty[$ telle que $F(1) = 3$ est donnée par :

a. $F(x) = x\ln(x) - 2x + 5$ **b.** $F(x) = \dfrac{3}{x}$

c. $F(x) = x\ln(x) + 3$ **d.** $\boxed{F(x) = x\ln(x) - x + 4}$

Pour F définie par $F(x) = x\ln(x) - x + 4$, on a $F(1) = 0 - 1 + 4 = 3$ et
$F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 + 0 = \ln(x) = f(x)$.

EXERCICE 2 **6 points**

Après son installation, un lundi matin, un aquarium contient 280 litres d'eau et des poissons.
Par évaporation, le volume d'eau dans l'aquarium diminue de 2 % par semaine. Compte tenu du nombre de poissons, cet aquarium doit contenir en permanence au minimum 240 litres d'eau.

Partie A

1. Si le volume diminue de 2 % chaque semaine, il en reste 98 %; donc au bout d'une semaine il restera (en litres) $280 \times 0,98 = 274,4$.

2. Au bout de 2 semaines, il restera $274,4 \times 0,98 = 268,912$ litres. Il s'en sera évaporé $280 - 268,912 = 11,088$ litres, soit $\dfrac{11,088}{280} \times 100 = 3,96\,\%$.
Donc en 2 semaines, il ne s'est pas évaporé exactement 4 % du volume d'eau initial.
Remarque – Retirer 4 % c'est multiplier par 0,96; répondre à cette question revient à dire que $0,98 \times 0,98 \neq 0,96$.

3. Le volume d'eau dans l'aquarium deviendra insuffisant quand il sera inférieur à 240 litres.
Le tableau ci-dessous donne les volumes (arrondis à l'unité) de l'aquarium la semaine n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Volume	280	274	269	264	258	253	248	243	238

C'est donc la 8^e^ semaine que le volume deviendra insuffisant.

Partie B

On ajoute chaque lundi matin, en une seule fois, 5 litres d'eau pour compenser l'évaporation hebdomadaire de 2 %. On note u_0 le volume initial d'eau en litres dans l'aquarium. Ainsi $u_0 = 280$.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note u_n le volume d'eau dans l'aquarium, en litres, n semaines après son installation, immédiatement après l'ajout hebdomadaire des 5 litres d'eau.

1. $u_1 = u_0\left(1 - \dfrac{2}{100}\right) + 5 = 280\left(1 - \dfrac{2}{100}\right) + 5 = 279,4$;
$u_2 = u_1\left(1 - \dfrac{2}{100}\right) + 5 = 279,4\left(1 - \dfrac{2}{100}\right) + 5 = 278,812$

2. Retirer 2 % c'est multiplier par 0,98; donc on passe du volume l'année n au volume l'année $n + 1$ en multipliant par 0,98 puis en ajoutant 5 : pour tout n, $u_{n+1} = 0,98u_n + 5$.

3. $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{279,4}{280} \approx 0,997\,857$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{278,812}{279,4} \approx 0,997\,895$
$\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$ donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

4. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel k désigne un nombre entier naturel et U un nombre réel.

```
U ← 280
Pour k allant de 1 à ...
    U ← ...
Fin Pour
```

a. On complète l'algorithme pour qu'à la fin de son exécution, la variable U contienne u_6.

```
U ← 280
Pour k allant de 1 à 6
    U ← 0,98 * U + 5
Fin Pour
```

b. Le tableau suivant donne les valeurs approchées à 10^{-2} de u_n :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	280	279,4	278,81	278,24	277,67	277,12	276,58

La valeur arrondie à 10^{-2} près du volume de l'aquarium au bout de 6 semaines est, en litres, 276,58.

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 250$.
On admet que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,98.

a. $v_0 = u_0 - 250 = 280 - 250 = 30$.

b. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}98$ et de premier terme $v_0 = 30$ donc, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = 30 \times 0{,}98^n$.

c. On sait que $v_n = u_n - 250$ donc $u_n = v_n + 250$. Pour tout n, $v_n = 30 \times 0{,}98^n$ donc, pour tout n, $u_n = 30 \times 0{,}98^n + 250$.

d. Pour tout n, $0{,}98^n > 0$ donc $0{,}98^n + 250 > 250$, ce qui prouve que $u_n > 250$; le volume d'eau sera donc toujours supérieur à 250 litres, donc la préconisation concernant le volume d'eau dans l'aquarium est respectée.

EXERCICE 3 — 6 points

Le niveau sonore N d'un bruit, à une distance D de sa source, dépend de la puissance sonore P de la source. Il est donné par la relation $N = 120 + 4\ln\left(\dfrac{P}{13 \times D^2}\right)$
où N est exprimé en décibels (dB), P en Watts (W) et D en mètres (m).

Partie A

1. Le niveau sonore N, en décibels, d'un bruit entendu à 10 mètres de la source sonore dont la puissance P est égale à 2,6 Watts est $120 + 4\ln\left(\dfrac{2{,}6}{13 \times 10^2}\right) \approx 95$.

Le niveau sonore arrondi à l'unité d'un bruit entendu à 10 m dont la puissance est égale à 2,6 W est 95 dB.

2. On donne $N = 84$ dB et $D = 10$ m.

La puissance P est solution de l'équation $84 = 120 + 4\ln\left(\dfrac{P}{13 \times 10^2}\right)$:

$$84 = 120 + 4\ln\left(\frac{P}{13 \times 10^2}\right) \iff -9 = \ln\left(\frac{P}{1300}\right) \iff \mathrm{e}^{-9} = \frac{P}{1300} \iff 1300\,\mathrm{e}^{-9} = P$$

La puissance arrondie à 10^{-2} près de la puissance donnant un volume sonore de 84 dB à 10 m est 0,16 W.

Partie B

Une entreprise de travaux publics réalise un parking en plein air. Sur le chantier d'aménagement de ce parking, une machine de découpe a une puissance sonore P égale à 0,026 Watts.

1. a. À une distance D de la machine, le niveau sonore N est

$$N = 120 + 4\ln\left(\frac{0{,}026}{13 \times D^2}\right) = 120 + 4\ln\left(\frac{0{,}002}{D^2}\right) = 120 + 4\ln(0{,}002) - 4\ln\left(D^2\right).$$

b. $120 + 4\ln(0{,}002) \approx 95{,}14$ et $\ln\left(D^2\right) = 2\ln(D)$ donc $4\ln\left(D^2\right) = 8\ln(D)$.
Donc une approximation de N peut être $95{,}14 - 8\ln(D)$.

Dans la suite de l'exercice, à une distance de x mètres de la machine, le niveau sonore N émis par la machine est modélisé par la fonction f définie sur $[0,1\,;\,20]$ par : $f(x) = 95,14 - 8\ln(x)$.

2. **a.** $f'(x) = 0 - 8 \times \dfrac{1}{x} = -\dfrac{8}{x}$

b. Si $x \in [0,1\ ;\ 20]$, $f'(x) < 0$.

c. On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0,1\,;\ 20]$.

3. On suppose qu'un ouvrier de cette entreprise se situe à trois mètres de la machine. La législation en vigueur l'oblige à porter des protections individuelles contre le bruit dès qu'un risque apparaît.

À une distance de 3 mètres, le niveau sonore est de $f(3) = 95,14 - 8\ln(3) \approx 86,4$ dB.

Le tableau ci-dessous donne le niveau de risque en fonction du niveau sonore :

Impacts sur l'audition	**Niveaux sonores en décibels**
Aucun	$[0\,;\,85[$
Risque faible	$[85\,;\,90[$
Risque élevé	$[90\,;\,120[$

Pour un niveau sonore de 86,4 dB, le risque est faible mais l'ouvrier doit néanmoins porter une protection contre le bruit.

4. Un ouvrier de l'entreprise sort de la zone de risque élevé quand $N < 90$; on résout cette inéquation :

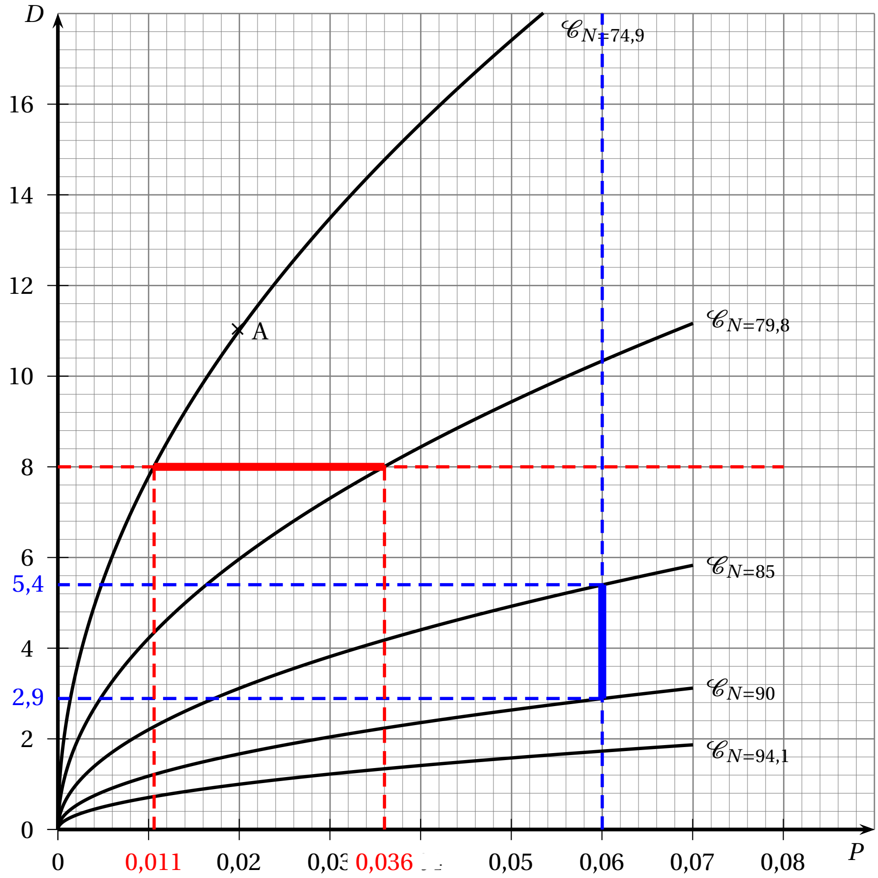
$N < 90 \iff f(x) < 90 \iff 95,14 - 8\ln(x) < 90 \iff 5,14 < 8\ln(x) \iff \dfrac{5,14}{8} < \ln(x)$

$\iff 0,6425 < \ln(x) \iff \mathrm{e}^{0,6425} < x$

$\mathrm{e}^{0,6425} \approx 1,90$ donc l'ouvrier sort de la zone de risque élevé au delà de 1,90 m.

Partie C

On s'intéresse au lien entre la puissance P d'un bruit et la distance D de sa source pour différentes valeurs de son niveau sonore N.



On admet que pour une puissance de 0,02 Watt, le niveau sonore du bruit est de 74,9 décibels à une distance de 11 mètres de la source sonore. Ainsi, le point A de coordonnées (0,02; 11) appartient à la courbe $\mathscr{C}_{N=74,9}$.

1. Pour un bruit de puissance P égale à 0,06 W, pour que le niveau sonore N soit compris entre 85 et 90 dB, il faut être situé environ entre 2,9 et 5,4 m (tracés en bleu sur le graphique).
2. Pour une source sonore située à une distance D de 8 m, les puissances minimale et maximale de cette source pour obtenir un niveau sonore compris entre 74,9 dB et 79,8 dB sont environ 0,011 W et 0,036 W (tracés en rouge sur le graphique).

EXERCICE 4 — 4 points

Un industriel commercialise des portes blindées. Il projette de lancer un nouveau modèle de portes blindées : les portes « SECUR ». Équipées d'un digicode et d'une caméra, elles seront donc plus sécurisées que celles déjà existantes sur le marché.

Partie A

Avant de débuter son projet, l'industriel s'intéresse à une étude portant sur le prix de vente des portes blindées classiques existantes.
Le prix de vente, en euros, d'une porte blindée classique est une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 3\,000$ et d'écart type $\sigma = 750$.

1. À la calculatrice, on trouve que la valeur arrondie à 10^{-4} près de la probabilité $P(1\,500 \leqslant X \leqslant 4\,500)$ est 0,9545.
2. À la calculatrice, on trouve que la valeur arrondie à 10^{-4} près de la probabilité qu'une porte blindée classique coûte plus de 2 500 euros – c'est-à-dire $P(X \geqslant 2\,500)$ – est 0,7475.
3. **a.** On complète le tableau suivant en utilisant la calculatrice :

a	$P(X \leqslant a)$
3 950	0,897 4
3 960	0,899 7
3 970	0,902 1

   b. Le montant minimal m tel qu'au moins 90 % des portes blindées classiques ont un prix de vente inférieur à ce montant est défini par $P(X \leqslant m) = 0,90$.
   D'après le tableau, on peut chercher m entre 3 960 et 3 970.
   Par approximations successives, on trouve :
   $P(X \leqslant 3\,961) \approx 0,899\,96$ et $P(X \leqslant 3\,962) \approx 0,900\,2$ donc le montant minimal est 3 962 €.

   c. L'industriel estime que le prix de vente du modèle de porte blindée équipée « SECUR » ne devra pas dépasser de plus de 15 % le montant minimal précédent.
   Le montant minimal, en euros, est de 3 962 ; si on le majore de 15 %, on obtient $3\,962 \times 1,15 = 4\,556,30$. Le prix de vente maximal pour une porte du modèle « SECUR » est donc de 4 556 euros.

Partie B

L'industriel envisage de commercialiser les portes blindées de modèle « SECUR » au tarif M déterminé précédemment. Il souhaite estimer la proportion de personnes susceptibles d'acheter son nouveau modèle. Une enquête est réalisée sur un échantillon de 984 personnes intéressées par l'achat d'une porte blindée. Sur cet échantillon, 123 personnes se disent favorables à l'achat du modèle « SECUR ».

1. La fréquence de personnes intéressées dans l'échantillon considéré est de $f = \dfrac{123}{984} = 0,125$.
   L'intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 %, de la proportion de personnes favorables à l'achat du nouveau modèle est donc :

$$I = \left[f - 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\ ;\ f + 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$$
$$= \left[0,125 - 1,96\sqrt{\frac{0,125\,(1-0,125)}{984}}\ ;\ 0,125 + 1,96\sqrt{\frac{0,125\,(1-0,125)}{984}}\right] = [0,104\,3\ ;\ 0,145\,7]$$

2. Pour que l'industriel prenne le risque d'investir dans les portes « SECUR », il faudrait qu'au minimum 20 % des personnes souhaitant s'équiper d'une porte blindée soient favorables à ce nouveau modèle.

D'après la question précédente, il y a une probabilité de 95 % que le pourcentage de personnes souhaitant s'équiper d'une porte blindée soient favorables à ce nouveau modèle appartienne à l'intervalle I.

L'industriel voudrait que ce pourcentage soit de 20 %. Ce pourcentage n'appartient pas à l'intervalle I donc on peut déconseiller – avec un risque d'erreur de 5 % – à l'industriel de réaliser son projet.