Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI 2D/STL–SPCL
Métropole 19 juin 2014

EXERCICE 1 **4 points**

1. X suit la loi normale telle que $\mu = 200$ et $\sigma = 2,86$.
   a. $p(195 \leqslant X \leqslant 205) \approx 0,9196$.
   b. $p(X \geqslant 195) = p(195 \leqslant X \leqslant +\infty) \approx 0,9598$.
2. $IF_{95\,\%} = \left[0,04 \pm 1,96 \times \sqrt{\dfrac{0,04 \times (1-0,04)}{150}}\right] = [0,04 \pm 0,0314] = [0,0086\ ;\ 0,0714]$.
   $f = \dfrac{10}{150} = \dfrac{1}{15} \approx 0,0667$.
   Avec $f \in IF_{95\,\%}$, le réglage de la machine n'est pas remis en cause.

EXERCICE 2 **4 points**

$z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ et $z' = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

1. $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
2. $z' = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - \mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = \overline{z}$.
3. $z \cdot z' = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \times 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = 2 \times 2 \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3} - \mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = 4 \times \mathrm{e}^0 = 4 \times 1 = 4$.
4. $z \cdot z'' = \mathrm{i} \iff z'' = \dfrac{\mathrm{i}}{z} \iff z = \dfrac{\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}} = \dfrac{\mathrm{i}\left(-1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)}{\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(-1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)} = \dfrac{-\mathrm{i}-\mathrm{i}^2\sqrt{3}}{(-1)^2 - \left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+3} = \dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{4}$.
   Donc
   $$|z''| = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{3}{16} + \dfrac{1}{16}} = \sqrt{\dfrac{4}{16}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}.$$
   Ce qui nous donne :
   $$\cos\theta = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \dfrac{2}{1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin\theta = \dfrac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} \times \dfrac{2}{1} = -\dfrac{1}{2}.$$
   donc $\theta = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$.

EXERCICE 3 **6 points**

Partie A :

$\forall t \in [0\ ;\ +\infty[$ on a $f(t) = 35\mathrm{e}^{-1,6t} - 30$.

1. $f(0,5) = 35\mathrm{e}^{-0,8} - 30 \approx -14$ °C.
2. $f'(t) = -1,6 \times 35\mathrm{e}^{-1,6t} + 0 = -56\mathrm{e}^{-1,6t}$ or $\forall t \in [0\ ;\ +\infty[$, $\mathrm{e}^{-1,6t} > 0$ et $-56 < 0$ donc $f'(t) < 0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$. La fonction f est décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. $f(1,5) = 35\mathrm{e}^{-2,4} - 30 \approx -27$ °C. La température des ailerons sera conforme au cahier des charges.

4. $f(t) = -24 \iff 35\mathrm{e}^{-1,6t} - 30 = -24 \iff 35\mathrm{e}^{-1,6t} = 6 \iff \mathrm{e}^{-1,6t} = \dfrac{6}{35} \iff \ln\left(\mathrm{e}^{-1,6t}\right) = \ln\left(\dfrac{6}{35}\right) \iff -1,6t = \ln\left(\dfrac{6}{35}\right) \iff t = -\dfrac{1}{1,6}\ln\left(\dfrac{6}{35}\right) \iff$
   $t = -0,625\ln\left(\dfrac{6}{35}\right) \approx 1,10.$
   Les ailerons atteignent la température de −24 °C au bout de 1 h et 6 min.

Partie B :

$\forall t \in [0\,;\,+\infty[$ on a $y' + 1,5y = -52,5$.

1. $y' + 1,5y = -52,5 \iff y' = -1,5y - 52,5$ ce qui nous donne $y = K\mathrm{e}^{-1,5t} - \dfrac{52,5}{1,5} \iff$
   $y = K\mathrm{e}^{-1,5t} - 35.$
2. **a.** À l'instant $t = 0$, les ailerons, à une température de 5 °C, sont placés dans le tunnel donc $g(0) = 5$.
   b. $g(0) = 5 \iff K\mathrm{e}^0 - 35 = 5 \iff K = 35 + 5 \iff K = 40$ donc $g(t) = 40\mathrm{e}^{-1,5t} - 35$.
3. $g(t) = -24 \iff 40\mathrm{e}^{-1,5t} - 35 = -24 \iff 40\mathrm{e}^{-1,5t} = 11 \iff \mathrm{e}^{-1,5t} = \dfrac{11}{40} \iff$
   $\ln(\mathrm{e}^{-1,5t}) = \ln\left(\frac{11}{40}\right) \iff -1,5t = \ln\left(\frac{11}{40}\right) \iff t = -\dfrac{2}{3}\ln\left(\frac{11}{40}\right) \approx 0{,}86$ h soit environ 52 min..
   Les ailerons atteignent la température de −24 °C au bout de 52 min.
   Le tunnel permet une congélation plus rapide.

EXERCICE 4 **6 points**

1. Une diminution de 10 % toutes les 5 minutes : $1 - 0,1 = 0,9$.
   a. $v_1 = 420 \times 0,9 = 378$ km/h. Ce résultat fait bien partie de la règle admise. La tornade appartient à la catégorie F4.
   b. Pour 15 minutes, on a $15 = 5 \times 3$ donc $n = 3$.
   $v_2 = 378 \times 0,9 = 340,2 \approx 340$ km/h et $v_3 = 340,2 \times 0,9 = 306,18 \approx 310$ km/h.
   Au bout de 15 minutes, la tornade est une tornade de catégorie F3.
   Cette tornade occasionne des dégâts classés comme « dégâts considérables ».
2. **a.** La diminution de 10 % correspond à la raison de la suite $q = 0,9$.
   b. (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $v_0 = 420$:
   c. « Tant que $v > 120$ »
   « Affecter à n, la valeur $n + 1$ »
   « v prend la valeur $v \times 0,9$ »
   d. Comme la tempête diminue de 10 % toutes les 5 minutes (et non pas toutes les minutes). On fait $5 \times n$.
3. La suite géométriques est définie par : $v_n = 420 \times 0,9^n$.
4. $v_n < 120 \iff 420 \times 0,9^n < 120 \iff 0,9^n < \dfrac{120}{420} \iff 0,9n < \dfrac{2}{7} \iff$
   $\ln(0,9^n) < \ln\left(\frac{2}{7}\right) \iff n \times \ln(0,9) < \ln(\frac{2}{7}) \iff n > \frac{\ln(\frac{2}{7})}{\ln(0,9)} \iff n > 11,89.$
   On a donc $n = 12$, la durée de vie de la tornade est de $12 \times 5 = 60$ c'est-à-dire 1 heure.