Durée : 4 heures

∽ vaccalauréat STI2D Métropole–La Réunion 18 juin 2019 ∽

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

1. On a $z_A = x + 2\text{i}$, avec $x > 0$.
   Or A appartient au cercle de centre O et de rayon 4, donc $\text{O}A^2 = x^2 + 2^2 = 4^2$ ou $x^2 = 12$ et donc $x = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$.
   On a donc $z_A = 2\sqrt{3} + 2\text{i} = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \text{i}\dfrac{1}{2}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + \text{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = 4\text{e}^{\frac{\pi}{6}}$: réponse **c.**
2. On sait que, quel que soit le réel x, $\ln\left(\text{e}^x\right) = x$, donc l'équation du **b.** se ramène à $x = -3$: réponse **b.**
3. On a $g'(x) = \dfrac{\text{e}^x(2x+1) - 2\text{e}^x}{(2x+1)^2} = \dfrac{\text{e}^x(2x+1-2)}{(2x+1)^2} = \dfrac{\text{e}^x(2x-1)}{(2x+1)^2}$. Réponse **d.**
4. On sait que la solution générale de l'équation différentielle est :
   $$f(x) = A\cos 2x + B\sin 2x.$$
   Or $f(0) = 1$ entraîne $A = 1$; en prenant $B = 0$, on trouve bien comme solution $f(x) = \cos 2x$. Réponse **b.**

Exercice 2 **7 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A *et* B *de cet exercice sont indépendantes.*

Partie A

1. Augmenter de 5 % revient à multiplier par $\left(1 + \dfrac{5}{100}\right) = 1 + 0,05 = 1,05$.
   - $63 \times 1,05 = 66,15 \approx 66,2$;
   - $66,15 \times 1,05 = 69,4575 \approx 69,5$;
   - $69,4575 \times 1,05 = 72,9304 \approx 72,9$; Au dixième près pour le dernier relevé, l'estimation de 5 % est cohérente.
2. En partant de 73 en 2018 la surface en l'année $2018 + n$ sera de $73 \times 1,05^n$.
   Il faut donc résoudre l'inéquation :
   $73 \times 1,05^n > 80$, soit $105^n > \dfrac{80}{73}$ et par croissance de la fonction logarithme népérien :
   $n\ln 1,05 > \ln\frac{90}{73}$ soit enfin $n > \dfrac{\ln\frac{90}{73}}{\ln 1,05}$.
   Or $\dfrac{\frac{90}{73}}{\ln 1,05} \approx 1,87$.La surface dépassera 80 pour $n = 2$ soit en 2020.
3. **a.** En 2021 la surface a naturellement augmenté de 5 % et le traitement l'a réduit de 10, donc : $P_1 = 80,5 \times 1,05 - 10 = 74,525$.
   b. De même de l'année n à l'année $n+1$, la surface est multipliée par 1,05 puis diminuée de 10, soit :
   $P_{n+1} = 1,05P_n - 10$ quel que soit le naturel n.

c. On a donc $P_2 = P_1 \times 1,05 - 10 = 74,525 \times 1,05 - 10 = 68,2513$, soit 68,251 au millième près.

d. La suite n'est pas géométrique car $\dfrac{P_1}{P_0} = \dfrac{74,525}{80,5} \approx 0,925$ et $\dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{68,251}{74,525} \approx 0,915$.

Il n'existe donc pas de réel q tel que $P_{n+1} = q \times P_n$: la suite n'est pas géométrique.

4.

```
n ← 0
P ← 80,5
Tant que P ⩾ 6
    P ← P × 1,05 − 10
    n ← n + 1
Fin Tant que
```

5. La calculatrice donne $P_{10} \approx 5,3$: on arrêtera donc le traitement à la fin 2031.

Partie B

1. • $f(0,2) = \dfrac{0,2}{0,2} = 1$;

• $g(0,2) = -0,2^2 + 0,2 \times 0,2 + 1 = 1$, donc 0,2 est une solution de l'équation $f(x) = g(x)$

2. Graphiquement on lit que $f(1) = g(1)$ (on vérifie que $f(1) = 0,2$ et $g(1) = -1 + 0,2 + 1 = 0,2$).

3. a. Sur l'intervalle [0,2 ; 1] la fonction g est positive, donc l'intégrale est égale à l'aire (en unité d'aire) de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0,2$ et $x = 1$.

b. Une primitive de la fonction g sur [0,2 ; 1] est G définie par $G(x) = -\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{0,2x^2}{2} + x = -\dfrac{x^3}{3} + 0,1x^2 + x$.

Donc $I = \displaystyle\int_{0,2}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = [G(x)]_{0,2}^{1} = G(1) - G(0,2) = -\dfrac{1^3}{3} + 0,1 \times 1^2 + 1 - \left(-\dfrac{0,2^3}{3} + 0,1 \times 0,2^2 + 0,2\right) = \dfrac{2,3}{3} + \dfrac{0,008}{3} - 0,004 - 0,2 = \dfrac{2,3}{3} - \dfrac{0,604}{3} = \dfrac{1,696}{3} \approx 0,57$ à 10^{-2} près.

4. a. La fonction F est dérivable sur l'intervalle [0,2 ; 1] et sur cet intervalle :

$F'(x) = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{x} = 0,2 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{0,2}{x} = f(x)$. Ceci montre que F est une primitive de f sur l'intervalle [0,2 ; 1].

b. On a $J = \displaystyle\int_{0,2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_{0,2}^{1} = F(1) - F(0,2) = \dfrac{1}{5}\ln(1) - \dfrac{1}{5}\ln(0,2) = -0,2\ln(0,2)$

5. L'aire de la partie grisée est donc égale à :

$I - J \approx 0,57 - 0,32$ soit environ 0,25 unités d'aire.

Or 1 u. a. $= 2,5 \times 6,25$ cm^2. Le logo se composant de deux parties de même aire, l'aire du logo est donc environ $2 \times 6,25 \times 0,25 = 2 \times 1,5625$ cm^2 soit arrondi au cm^2, 3 cm^2.

Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. Le volume de CO_2 présent dans cette pièce à 20 h est de $900\,000 \times \dfrac{0,6}{100} = 9\,000 \times 0,6 = 5\,400$ dm^3.

2. a. Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme :

$V(t) = A\mathrm{e}^{-0,01t} + \dfrac{4,5}{0,01}$, avec $A \in \mathbb{R}$. Donc : $V(t) = A\mathrm{e}^{-0,01t} + 450$, avec $A \in \mathbb{R}$.

b. On sait que $V(0) = 5\,400$, d'où en utilisant la question précédente :

$V(0) = A + 450 = 5\,400$, d'où $A = 5\,400 - 450 = 4\,950$.

Conclusion : pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 690], $V(t) = 4\,950\mathrm{e}^{-0,01t} + 450$.

3. 21 h correspond à $t = 60$, donc
$V(1) = 4\,950\mathrm{e}^{-0,01\times 60} + 450 = 4\,950\mathrm{e}^{-0,6} + 450 \approx 3\,166{,}62$, soit 3 167 dm^3 à 1 dm^3 près.
4. À 7 h 30, il se sera écoulé 690 minutes et le volume de CO_2 sera égal à :
$V(690) = 4\,950\mathrm{e}^{-0,01\times 690} + 450 = 4\,950\mathrm{e}^{-6,9} + 450 \approx 454,989$.
Le taux de CO_2 sera donc de :
$\dfrac{454,959}{90\,000} \approx 0{,}000\,5$. Les responsables ont raison.
5. Il faut résoudre l'inéquation :
$4\,950\mathrm{e}^{-0,01t} + 450 < 900$, ou $4\,950\mathrm{e}^{-0,01t} < 450$, ou encore $11 \times 450\mathrm{e}^{-0,01t} < 450$, et en simplifiant : $11\mathrm{e}^{-0,01t} < 1$ et en multipliant par $\mathrm{e}^{0,01t}$, $11 < \mathrm{e}^{0,01t}$.
D'après la croissance de la fonction logarithme :
$\ln 11 < 0,01t$ et enfin $100\ln 11 < t$.
Or $100\ln 11 \approx 239,79 \approx 240$ min ou encore 4 h.
Le volume de CO_2 dans la pièce deviendra inférieur à 900 dm^3 à minuit.

Exercice 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les résultats sont à arrondir à 10^{-3} près. Les trois parties sont indépendantes.

Partie A

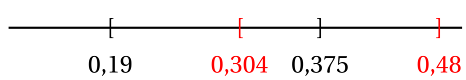
1. La durée moyenne de fonctionnement sans panne d'un capteur photographique est égale à l'espérance de la variable D, donc 4 ans.
2. La calculatrice donne $P(3,5 \leqslant D \leqslant 4,) \approx 0,316$.
3. On a $P(D < 2) = P(\leqslant 4) - P(2 \leqslant D \leqslant 4) \approx 0,052$.

Partie B

1. **a.** On a $\mathrm{E}(T) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0,025} = 40$ (jours).
   b. Le résultat précédent montre qu'en moyenne il faudra compter 40 jours pour le remplacement.
2. **a.** On a $P(T \leqslant 7) = 1 - \mathrm{e}^{-0,025\times 7} \approx 0,161$ (au millième près).
   La probabilité de récupérer le téléphone en moins de 7 jours est environ $0,161$.
   b. Inversement $P(T \geqslant 20) = \mathrm{e}^{-0,025\times 20} \approx 0,607$.
   La probabilité d'attendre le retour de l'appareil au moins trois semaines est 0,607.

Partie C

1. La proportion de clients de la marque B ayant récupéré en moins de 20 jours leur téléphone est égale à $f = \dfrac{26}{92} = \dfrac{13}{46}$.
L'intervalle de confiance à 95 % des clients de la marque B est donc égal à :
$$\left[\frac{13}{46} - 1,96\sqrt{\frac{\frac{13}{46}\times\left(1-\frac{13}{46}\right)}{92}}\ ;\ \frac{13}{46} + 1,96\sqrt{\frac{\dfrac{13}{46}\times\left(1-\frac{13}{46}\right)}{92}}\right] \approx [0,190\ ;\ 0,375]$$
2.



Les deux intervalles ayant une large plage commune on ne peut rien conclure sur l'efficacité des deux S. A. V.