∽ Corrigé du baccalauréat STI2D ∾

Épreuve d'enseignement de spécialité
Métropole – 11 mai 2022
Physique-Chimie et Mathématiques

Exercice 1 (physique-chimie et mathématiques, 6 points)

Modèle de la vitesse de refroidissement d'un lait écrémé

Dans le domaine de l'agroalimentaire, la question du refroidissement des produits préparés peut être cruciale. On peut citer par exemple la problématique de la durée de refroidissement du lait produit dans une ferme : afin d'éviter la prolifération microbienne, il convient de minimiser cette durée de refroidissement. Afin d'étudier l'évolution de la température d'une masse de liquide en contact avec l'atmosphère d'une pièce en fonction du temps, l'expérience suivante est réalisée. Une masse de lait écrémé $m = 150\,\text{g}$ est chauffée à une température de 63,4 °C. On laisse ensuite le lait se refroidir à l'air libre en relevant sa température toutes les minutes. Pendant toute la durée de l'expérience, la température de l'air de la pièce reste constante et inférieure à celle du lait.
Résultats de l'expérience : *température de la masse de lait en fonction du temps*

t (en min)	0	1	2	3	4	5	6	7
température (en °C)	63,4	61,7	60,2	58,6	57,4	56,2	54,7	53,6

t (en min)	8	9	10	11	12	13	14	15
température (en °C)	52,4	51,2	50,4	49,4	48,5	47,4	46,6	45,9

Donnée :

- pour la capacité thermique massique du lait, on prendra: $c_{\text{lait}} = 4,0\,\text{kJ.kg-1.K-1}$.

1. Citer les trois modes de transferts thermiques.

   Correction:

   Les trois modes de transfert thermique sont la convection, la conduction, et le rayonnement.

2. Préciser, en le justifiant, le sens du transfert thermique entre la masse de lait et l'air de la pièce.

   Correction:

   Le lait se refroidit, donc le transfert thermique s'opère de la masse de lait vers l'air de la pièce.

3. Calculer, d'après les résultats expérimentaux, la valeur du transfert thermique Q entre la masse de lait et l'air de la pièce entre les dates $t = 1$ min et $t = 2$ min.

   Sans calcul, préciser si la valeur du transfert thermique est plus petite ou plus grande que Q entre les dates $t = 6$ min et $t = 7$ min.

   Correction:

   La différence de température, entre les dates $t = 1$ min et $t = 2$ min, est de

$\Delta T = 61,7 - 60,2 = 1,5$℃. On a aussi $m = 150$g et $c_{\text{lait}} = 4,0$kJ.kg-1.K-1. De par le cours, on a:

$$\begin{aligned} Q &= c_{\text{lait}} \times m \times \Delta T \\ &= 4,0 \times 0,15 \times 1,5 \qquad \text{après avoir converti } m \text{ en kg} \\ &= 0,9\,\text{kJ}. \end{aligned}$$

Entre $t = 6$ min et $t = 7$ min, la différence de température est moindre, donc la valeur de transfert thermique est plus petite que Q.

La température du lait, exprimée en degré Celsius, en fonction du temps t, exprimé en minute, est modélisée par la fonction T définie sur $[0\,;\ +\infty[$ par:

$$T(t) = 37 \times \mathrm{e}^{\frac{-20t}{459}} + 26,4.$$

4. Calculer $T(0)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Correction:

On a

$$\begin{aligned} T(0) &= 37 \times \mathrm{e}^{\frac{-20\times 0}{459}} + 26,4 \\ &= 37 \times \mathrm{e}^{0} + 26,4 \\ &= 37 \times 1 + 26,4 \\ &= 63,4 \end{aligned}$$

Lorsque l'on commence la prise de mesures, le lait a une température de $63,4$℃ (ce qui est conforme aux données de l'énoncé).

5. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} T(t)$.

Selon ce modèle, quelle est la température de l'air de la pièce ? Justifier.

Correction:

Une propriété du cours dit que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{kt} = 0$ lorsque $k < 0$. Ici, $k = \dfrac{20}{459}$; ainsi, par produit et somme,

$$\lim_{t\to+\infty} T(t) = 37 \times 0 + 26,4 = 26,4.$$

On peut affirmer qu'alors, la température de l'air pièce est de $26,4$ ℃ puisque, après un long temps passé, la température du lait se rapproche de celle du milieu ambiant.

6. Selon ce modèle, au bout de combien de temps la température du lait vaut-elle 40 °C? Donner le résultat en minute et seconde.

Correction:

On a

$$\begin{aligned}
& & T(t) &= 40\\
&\Longleftrightarrow & 37\times \mathrm{e}^{\frac{-20t}{459}}+26,4 &= 40\\
&\Longleftrightarrow & 37\times \mathrm{e}^{\frac{-20t}{459}} &= 40-26,4\\
&\Longleftrightarrow & \mathrm{e}^{\frac{-20t}{459}} &= \frac{13,6}{37}\\
&\Longleftrightarrow & \frac{-20t}{459} &= \ln\left(\frac{13,6}{37}\right)\\
&\Longleftrightarrow & t &= \frac{\ln\left(\frac{13,6}{37}\right)}{\frac{-20}{459}}\\
& & &= -\frac{459}{20}\ln\left(\frac{13,6}{37}\right)\\
& & &\simeq 22,969.
\end{aligned}$$

En convertissant $0,969$ minutes en seconde, on trouve que la température du lait atteint 40 °C au bout de 22 minutes et 58 secondes.

Exercice 3 (mathématiques, 4 points)

Le candidat doit traiter quatre questions parmi les six numérotées de 1 à 6 que comporte l'exercice. Les questions sont indépendantes les unes des autres. Le candidat choisit les quatre questions auxquelles il répond et indique clairement leur numéro sur sa copie en début d'exercice. Seules ces questions sont évaluées. Chacune d'elles est notée sur un point. Traiter une question supplémentaire ne rapporte aucun point.

Question 1.

1. Montrer, en détaillant vos calculs, que:

$$\ln(2\,025) = 4\ln(3) + 2\ln(5).$$

2. Simplifier le nombre A ci-dessous en détaillant les calculs:

$$A = 2\ln\left(\mathrm{e}^4\right) - 3\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$

Correction:

1. On a

$$\begin{aligned}
4\ln(3)+2\ln(5) &= \ln\left(3^4\right)+\ln\left(5^2\right)\\
&= \ln\left(3^4\times 5^2\right)\\
&= \ln(2\,025).
\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
A &= 2\ln\left(\mathrm{e}^4\right) - 3\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\\
&= 2\times 4\ln(\mathrm{e}) - 3\times(-\ln(\mathrm{e})\\
&= 2\times 4 - 3\times(-1)\\
A &= 11.
\end{aligned}$$

Question 2.
On désigne par $\mathbf{i}$ le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. On considère le nombre complexe suivant:

$$z = \frac{-1+\mathbf{i}}{3\mathbf{i}}.$$

1. Mettre z sous forme algébrique. Détailler les calculs.

2. Mettre z sous forme exponentielle. Détailler les calculs.

Correction:

1. On écrit, en multipliant numérateur et dénominateur par $-\mathbf{i}$:

$$z = \frac{(-1+\mathbf{i})(-\mathbf{i})}{(3\mathbf{i})(-\mathbf{i})} = \frac{-(-\mathbf{i})-\mathbf{i}^2}{-3\mathbf{i}^2} = \frac{\mathbf{i}+1}{3} = \frac{1}{3}+\mathbf{i}\frac{1}{3}.$$

2. Le module de z est

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Soit $u = \dfrac{z}{|z|}$. Ce nombre complexe, de module 1, a le même argument que z. On a

$$\begin{aligned} u &= \frac{\frac{1}{3}+\mathbf{i}\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} \\ &= \left(\frac{1}{3}+\mathbf{i}\frac{1}{3}\right)\frac{3}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{3}\times\frac{3}{\sqrt{2}}+\mathbf{i}\frac{1}{3}\times\frac{3}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}+\mathbf{i}\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}+\mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Un argument de u est donc θ tel que $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On prend $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Ainsi, sous forme exponentielle, on a $z = \frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$.

Question 3.
On considère l'équation différentielle $(E) : 2y'+y=0$, où y est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

2. Le plan est muni d'un repère. Déterminer la solution f de (E), dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans ce repère passe par le point $A : \big(\ln(9)\ ;\ 1\big)$.

Correction:

1. On a $2y'+y=0$ si et seulement si $y'+\frac{1}{2}y=0$, ou bien si et seulement si $y'=-\frac{1}{2}y$. Les solutions y de cette équation différentielle sont donc de la forme $y = C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

2. Comme $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A : \big(\ln(9)\ ;\ 1\big)$, on a $f\big(\ln(9)\big) = 1$. En remplaçant x par $\ln(9)$ et y par 1 dans l'expression générale des solutions, il vient

$$\begin{aligned}1 &= C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln(9)}\\ 1 &= C\mathrm{e}^{-\ln\left(\sqrt{9}\right)}\\ 1 &= C\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{9}}\right)}\\ 1 &= C\frac{1}{\sqrt{9}}\\ \sqrt{9} &= C\end{aligned}$$

d'où l'on tire $C = 3$, et par suite $f(x) = 3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

Question 4.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a + b\mathrm{e}^x$, où a et b sont deux nombres réels. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 4x - 1$. On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g, tracées dans le repère orthogonal ci-dessous.

1. On admet que les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un unique point en commun, noté A d'abscisse 0. Calculer $g(0)$, puis en déduire que $a + b = -1$.

2. On admet que les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont la même tangente T au point A.

   a. Donner, pour tout réel x, une expression de $g'(x)$, puis calculer $g'(0)$.

   b. En déduire la valeur de b, puis celle de a.

Correction:

1. On a $g(0) = -1$. Puisque A est commun aux deux courbes, on a aussi $f(0) = -1$; mais par le calcul, $f(0) = a + b\mathrm{e}^0 = a + b$. Il s'ensuit l'égalité $a + b = -1$.

2. **a.** On a, pour tout réel x, $g'(x) = 2x - 4$, puis $g'(0) = 2 \times 0 - 4 = -4$.

   b. Puisque $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont la même tangente T en A, les dérivées évaluées en 0 doivent être identiques; ainsi on a $f'(0) = -4$. Mais par le calcul, $f'(x) = b\mathrm{e}^x$ pour tout réel x, donc $f'(0) = b\mathrm{e}^0 = b$. Il vient alors:

   - par identification de $f'(0)$: $b = -4$;
   - puis, comme $a + b = -1$, on a $a - 4 = -1$, soit $a = -1 + 4 = 3$.

Question 5.

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par:

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2\ln(x).$$

1. On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x de de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$,

$$g'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x}.$$

2. Montrer que la fonction g admet un minimum, dont on précisera la valeur exacte, sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Correction:

1. La fonction g est une somme de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, elle est donc dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, et pour tout x de $]0;+\infty[$, on a $g'(x) = \frac{1}{2}(2x) - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x}$.

   Or, on a, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$:

   $$\frac{(x-1)(x+1)}{x} = \frac{x^2-1}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x} = g'(x).$$

2. On étudie le signe de $g'(x)$ grâce à sa forme factorisée donné à la question précédente. Puisque l'on définit la fonction sur $]0\,;\,+\infty[$, le dénominateur de g' est positif, et le facteur $x+1$ est aussi positif. Il s'ensuit que $g'(x)$ a le même signe que $x-1$, c'est-à-dire:

   - négatif sur $]0\,;\,1[$;
   - positif sur $]1\,;\,+\infty[$;
   - nul pour $x = 1$.

   Par conséquent, g admet pour sens de variation les choses suivantes:

   - g est décroissante sur $]0\,;\,1[$;
   - g est croissante sur $]1\,;\,+\infty[$;
   - et g admet un minimum en 1.

   Ce minimum vaut $g(1) = \frac{1}{2} \times 1^2 - \ln(1) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$.

Question 6.

Rappel: pour a et b deux réels, on a les formules suivantes:

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b).$$

La tension U, exprimée en volt, aux bornes d'un dipôle en fonction du temps t, exprimé en seconde, est donnée par : $U(t) = \cos(50t) + \sqrt{3}\sin(50t)$.

1. Pour tout nombre réel t, écrire $U(t)$ sous la forme $U(t) = U_{\max}\cos(\omega t + \varphi)$ où:

   - $U_{\max}$ représente la tension maximale (exprimée en volt);
   - ω représente la pulsation (exprimée en rad.s-1);
   - φ représente le déphasage (exprimé en rad).

2. En déduire la fréquence correspondante $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$, exprimée en Hz. Arrondir le résultat à l'unité.

Correction:

1. Soit z le nombre complexe défini par $z = 1 + \mathbf{i}\sqrt{3}$. Ce nombre complexe a pour module $|z| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$. Par ailleurs, le nombre complexe

$$\frac{z}{|z|} = \frac{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2},$$

est de module 1 et admet pour argument un nombre ψ tel que $\cos\psi = \frac{1}{2}$ et $\sin\psi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, soit $\psi = \frac{\pi}{3}$ comme argument principal. Ce nombre ψ est aussi un argument de z.

Alors, il suffit de prendre $U_{\text{max}} = |z| = 2$, $\omega = 50$ et $\varphi = -\psi = -\frac{\pi}{3}$ pour obtenir la bonne expression. En effet,

$$\begin{aligned}
2\cos\left(50t - \frac{\pi}{3}\right) &= 2\left(\cos(50t)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin(50t)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\\
&= 2\left(\cos(50t) \times \frac{1}{2} + \sin(50t) \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= \cos(50t) \times 1 + \sin(50t) \times \sqrt{3}\\
&= U(t).
\end{aligned}$$

2. Il suffit de calculer $f = \dfrac{50}{2\pi} = \dfrac{25}{\pi} \simeq 8$ Hz, une fois arrondi à l'unité.