Baccalauréat STI2D Épreuve d'enseignement de spécialité

Métropole Antilles–Guyane 20 mars 2023

Physique-Chimie et Mathématiques

EXERCICE 1 physique-chimie et mathématiques (4 points)

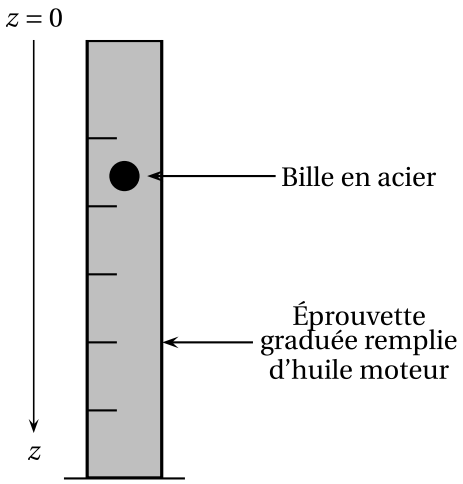
Le viscosimètre à chute de bille

La viscosité d'une huile, notée v, est un paramètre exprimé en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$, dont la connaissance est essentielle pour toute utilisation de cette huile.

Cet exercice propose un exemple de méthode de mesure de la valeur de la viscosité d'une huile de moteur Diesel du commerce.

Pour réaliser cette mesure, on utilise un « viscosimètre à chute de bille », constitué d'une éprouvette remplie d'huile de moteur dans laquelle est lâchée une bille métallique sphérique.

On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen et la bille est lâchée sans vitesse initiale depuis la position $z = 0$.



Données :

- Rayon de la bille utilisée : $R = 1,1$ cm.
- Volume de la bille : $V = 5,6\ \text{cm}^3 = 5,6 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$.
- Masse de la bille métallique : $m = 20,1$ g.
- Masse volumique de l'huile étudiée : $\rho_{\text{huile}} = 8,40 \times 10^2\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.
- Intensité de la gravitation : $g = 9,8\ \text{m.s}^{-2}$.

Les forces exercées sur la bille métallique sont :

- La poussée d'Archimède, notée $\overrightarrow{P_A}$ de même direction que le poids $\overrightarrow{P}$ et de sens opposé. Sa valeur est $P_A = \rho_{\text{huile}} V g$, où ρ_{huile} est la masse volumique de l'huile.

— La force de frottement fluide exercée par l'huile sur la bille est notée $\overrightarrow{f}$. Elle est ici de même direction que le poids $\overrightarrow{P}$ et de sens opposé. Sa valeur est donnée par la relation $f = 6\pi\eta R v$, où v est la valeur de la vitesse de la bille, η est la viscosité de l'huile et R le rayon de la bille.

3. On note v la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ comme la projection du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ sur l'axe (Oz).
La seconde loi de Newton donne sur l'axe Oz :
$m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -6\rho hRv + mg - \rho_{\text{huile}}Vg$, d'où puisque $m \neq 0$:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{6\pi vRv}{m} + g - \frac{\rho_{\text{huile}}Vg}{m}.$$

En explicitant les valeurs numériques, on admet que v est solution de l'équation différentielle (E) suivante où $v(t)$ est exprimée en m.s^{-1} et t en s :

$$(E) : \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -6,8v + 7,5.$$

4. • Les solutions de l'équation différentielle : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 6,8v = 0$, sont définies par :
$v(t) = K\mathrm{e}^{-6,8t}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
• Une solution particulière constante de cette équation est donnée par $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \iff -6,8v + 7,5 = 0 \iff v = \dfrac{7,5}{6,8} = \dfrac{75}{68}$.
La solution générale de cette équation différentielle est donc donnée par :
$v(t) = K\mathrm{e}^{-6,8t} + \dfrac{75}{68}$ et comme $v(0) = 0 \iff K + \dfrac{75}{68} = 0 \iff K = -\dfrac{75}{68}$, soit finalement :

$$v(t) = -\frac{75}{68}\mathrm{e}^{-6,8t} + \frac{75}{68}.$$

5. On sait que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-6,8t} = 0$ et également que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -\frac{75}{68}\mathrm{e}^{-6,8t} = 0$, donc par somme de limites $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} = v(t) = v_{\text{lim}} = \frac{75}{68}$.

6. On mesure expérimentalement une vitesse limite $v_{\text{lim}} = 1,1$ m.s^{-1}.
On peut en déduire la valeur de la viscosité η par la relation suivante :

$$\eta = \frac{\left(m - \rho_{\text{huile}}V\right)g}{6\pi R v_{\text{lim}}}.$$

On calcule $\eta = \dfrac{\left(20,1\cdot 10^{-3} - 840 \times 5,6\cdot 10^{-6}\right) \times 9,81}{(6\pi \times 0,011 \times 1,1)} \approx 0,66$ kg·m^{-1}· s^{-1}.
C'est à peu près la valeur fournie par le fabricant.

EXERCICE 3 mathématiques 4 points

Les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes les unes des autres. Chacune d'elles est notée sur un point.

Question 1

Pour cette question, indiquer la lettre de la réponse exacte.
Aucune justification n'est demandée.

$\dfrac{\left(\mathrm{e}^{-3x}\right)^2 \times \left(\mathrm{e}^{2x}\right)^{-3}}{\mathrm{e}^{5x} \times \mathrm{e}^{6x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-6x} \times \mathrm{e}^{-6x}}{\mathrm{e}^{11x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-12x}}{\mathrm{e}^{11x}} = \mathrm{e}^{-12x-11x} = \mathrm{e}^{-23x}$. Réponse D.

Question 2

En posant $u(x) = \mathrm{e}^{2x}$, d'où $u'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$ et $v(x) = -3x+1$, d'où $v'(x) = -3$, on a $f'(x) = (uv)'(x) = u'(x)\times v(x)+u(x)v'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}(-3x+1)-3\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}[2(-3x+1)-3] = \mathrm{e}^{2x}(-6x+2-3) = \mathrm{e}^{2x}(-6x-1)$.

Question 3

- Avec $z = \sqrt{3}+\mathrm{i}$, on a $|z|^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 = 3+1 = 4 = 2$, d'où $|z| = 2$.
- On peut alors en factorisant 2 , écrire :

$z = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right)$.

Or on sait que $\cos\frac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$, donc :

$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}}$, écriture exponentielle de z.

Question 4

$$\frac{2}{3\ln(10)}\ln(x) - 2,88 = 4.$$

$\dfrac{2}{3\ln(10)}\ln(x) - 2,88 = 4 \iff \dfrac{2}{3\ln(10)}\ln(x) = 6,88 \iff \dfrac{1}{3\ln(10)}\ln(x) = 3,44 \iff \ln(x) = 3 \times \dfrac{3,44\ln(10)}{2} \iff \ln(x) = 10,32\ln(10) \iff \ln(x) = \ln\left(10^{10,32}\right) \iff x = 10^{10,32}$, soit environ $2,089 \times 10^{10}$ par croissance de la fonction logarithme népérien.

$S = \left\{10^{10,32}\right\}$.