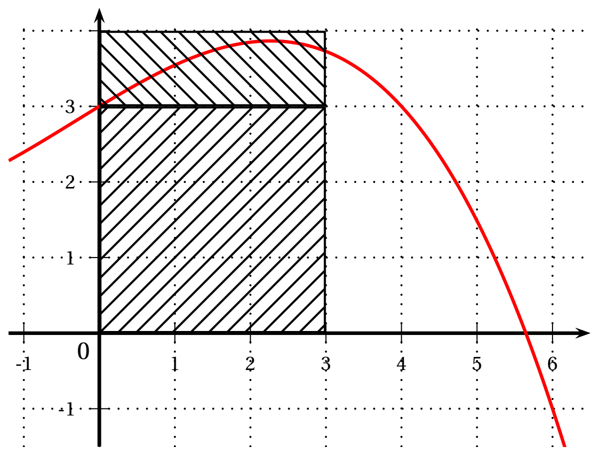
Durée : 4 heures

∽ Corrigé du baccalauréat STI 2D/STL ∾ Métropole–La Réunion 7 septembre 2015

EXERCICE 1 **4 points**

1. Si $z = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, alors $\overline{z} = 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
2. 

   On voit clairement sur la figure l'encadrement : $9 < I < 12$
3. La fonction est décroissante sur $[0\,;\,4]$ et croissante sur $[1\,;\,10]$, donc $f'(x) \leqslant 0$ sur $[0\,;\,1]$ et $f'(x) \geqslant 0$ sur $[1\,;\,10]$. La seule courbe vérifiant ces deux conditions est la courbe 2.
4. On a $P(X < 3) = 0,5$.

EXERCICE 2 **6 points**

1. On a $T = 0,7 \times \dfrac{1,8}{0,03} = \dfrac{1,26}{0,03} = 42$ (h).
2. **a.** Diminuer de 1 %, revient à multiplier par $1 - \dfrac{1}{100} = \dfrac{99}{100} = 0,99$.
   On a donc $T_1 = T_0 \times 0,99 = 42 \times 42 = 41,58$ (h), puis
   $T_2 = T_1 \times 0,99 = 41,58 \times 0,99 = 41,1642 \approx 41,16$ (h).

   b. On a vu que chaque charge diminue de 1 %, ce qui revient à la multiplier par $0,99$, soit $T_{n+1} = T_n \times 0,99$.

   c. Les termes T_n sont donc les termes d'une suite géométrique de premier terme 42 et de raison 0,99. On sait qu'alors $T_n = T_0 \times 0,99^n = 42 \times 0,99^n$.
3. **a.**

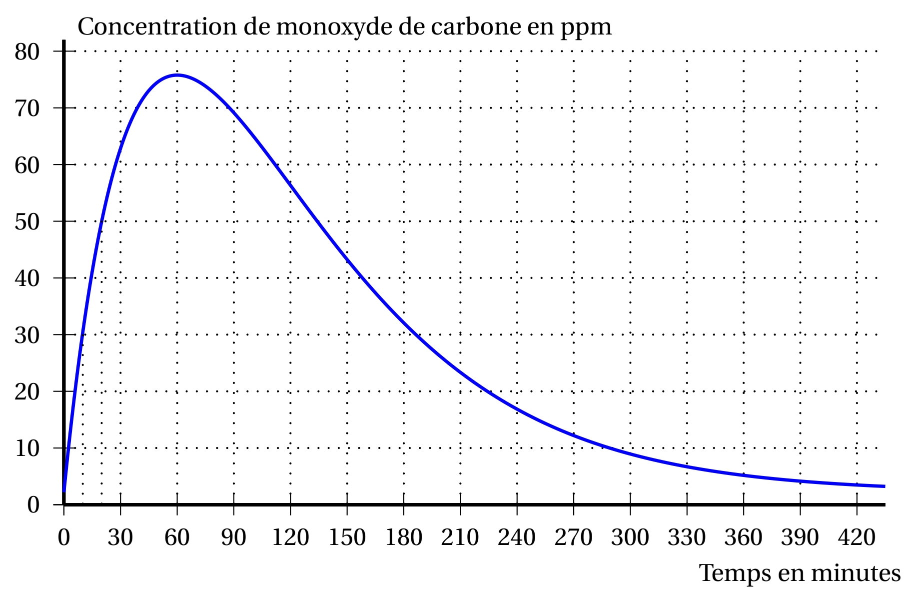
Variables
n : nombre entier naturel
T : nombre réel
q : nombre réel
Initialisation
n prend la valeur 0
T prend la valeur 42
q prend la valeur $0,99$
Traitement
Tant que $T > 21$
T prend la valeur $T \times q$
n prend la valeur $n + 1$
Fin Tant que
Sortie
Afficher $n + 300$

b. En programmant cet algorithme, on trouve que l'autonomie de la batterie aurait diminué de moitié au bout de 369 recharges.
Par le calcul il faut résoudre l'inéquation :
$42 \times 0,99^n < 21$ ou $0,99^n < 0,5$ et en prenant le logarithme népérien : $n \ln 0,99 < \ln 0,5$ ou $n > \dfrac{\ln 0,5}{\ln 0,99}$ (car $\ln 0,99 < 0$).
Or $\dfrac{\ln 0,5}{\ln 0,99} \approx 68,96$, donc $n = 69$.
On a bien $300 + 69 = 369$.

4. On résout l'inéquation $42 \times 0,99^n < 5$ ou $0,99^n < \dfrac{5}{42}$ et en prenant le logarithme népérien : $n \ln 0,99 < \ln \frac{5}{42}$ et enfin $n > \dfrac{\ln \frac{5}{42}}{\ln 0,99}$.
La calculatrice donne $\dfrac{\ln \frac{5}{42}}{\ln 0,99} \approx 211,7$, donc $n = 212$ au moins.
La durée de vie est donc de $300 + 212 = 512$ recharges.

EXERCICE 3 **6 points**

Partie A



1. La concentration est inférieure à 100 ppm. On ne regarde donc que les deux premiers cas d'intoxication :

– la concentration atteint 30 ppm au bout de 10 min environ et 120 min plus tard, soit au bout de 130 min, elle est toujours supérieure à 30 ppm : l'alarme va donc se déclencher ;

– la concentration atteint 50 ppm au bout de 20 min environ et 60 min après, soit au bout de 80 min elle est toujours supérieure à 50 ppm : c'est donc cette alarme qui va se déclencher en premier.

2. La concentration maximale est environ 75 ppm : certaines personnes auront donc des symptômes et des effets : ceux qui sont dans les trois premières du tableau à partir du bas.

Partie B

1. Calculer la concentration de monoxyde de carbone en ppm dans la pièce :

a. L'accident correspond à $t = 0$ et $f(0) = 2,2 + 200 \times 0 \times \text{e}^{-0} = 2,2$ (ppm).

b. 30 minutes correspondent à $t = 0,5$ (h) et $f(0,5) = 2,2 + 200 \times 0,5 \times \text{e}^{-0,5} = 2,2 + 100\text{e}^{-0,5} \approx 62,853$ soit 62,85 ppm au centième près.

2. On voit d'après le graphique que la fonction f croît de $f(0) = 2,2$ à $f(1) = 2,2 + 200\text{e}^{-1} \approx 75,78$.

Elle décroît ensuite de $f(1)$ à 0.

3. a. f est somme de produits de fonctions toutes dérivables sur $[0\,;\,8]$, elle est donc dérivable sur cet ensemble et en dérivant comme un produit :
$f'(t) = 200\text{e}^{-t} + 200 \times (-1)\,t\text{e}^{-t} = 200\text{e}^{-t}(1 - t)$.

b. On sait que quel que soit le réel t, $\text{e}^{-t} > 0$, donc le signe de f' est celui de $1 - t$:

- $1 - t > 0$ si $0 \leqslant t < 1$: $f'(t) > 0$ sur $[0\,;\,1[$;
- $1 - t < 0$ si $1 < t$: $f'(t) < 0$ sur $]1\,;\,8]$;
- $f'(1) = 0$.

c. On retrouve bien le fait que f est croissante sur $[0\,;\,1[$ et décroissante sur $]1\,;\,8]$.

Le maximum de la fonction est $f(1) \approx 75,78$.

4.

$$F(t) = 2,2t - 200(t + 1)\text{e}^{-t}.$$

a. Soit m la valeur moyenne sur les 8 heures :
$m = \dfrac{1}{8}\displaystyle\int_0^8 f(t)\,\text{d}t = \dfrac{1}{8}\,[F(t)]_0^8 = \dfrac{F(8) - F(0)}{8} = \dfrac{2,2 \times 8 - 200 \times 9\text{e}^{-8} - \left(-200\text{e}^{0}\right)}{8} = \dfrac{17,6 - 1800\text{e}^{-8} + 200}{8} \approx 27,12$ au centième près

b. Comme $27,12 < 50$, la sécurité des personnes présentes dans la pièce n'aurait pas été remise en cause lors de l'accident simulé.

EXERCICE 4 — 4 points

1. a. Titre de la cellule A2 : « Années entre deux séismes majeurs ».

b. Formule dans C2 : $\boxed{\text{= C1 - B1}}$

2. a. On a $m = \dfrac{31 + 8 + 49 + \cdots + 4}{17} = \dfrac{245}{17} \approx 14,41$.

b. On a $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{245}{17}$, donc $\lambda = \dfrac{17}{245} \approx 0,006938$ soit $0,0694$ à 10^{-4} près.

3. **a.** $P(X \leqslant 20) = \displaystyle\int_0^{20} 0{,}0694\text{e}^{-0{,}0694t}\,\text{d}t = \left[-\text{e}^{-0{,}0694t}\right]_0^{20} = 1 - \text{e}^{-1{,}388} \approx 0,7504$ soit 0,75 au centième près.

   b. Comme $0,75 > 0,7$ l'affirmation du sismologue paraît cohérente avec la modélisation par une loi exponentielle.

4. Comme 2050 - 2014 = 36, il faut calculer $P(X > 36)$:

   $P(X > 36) = 1 - P(X \leqslant 36) = 1 - \displaystyle\int_0^{36} 0{,}0694\text{e}^{-0{,}0694t}\,\text{d}t = 1 - \left[-\text{e}^{-0{,}0694t}\right]_0^{36} =$ $1 - 1 + \text{e}^{-2{,}4984t} \approx 0{,}0822$ soit 0,08 au centième près (donc 92 % qu'il y ait un séisme majeur d'ici 2050).

5. **a.** $1 - \text{e}^{-0{,}0694t} = 0,95$ si $1 - 0,95 = \text{e}^{-0{,}0694t}$ ou $0,05 = \text{e}^{-0{,}0694t}$ et en prenant le logarithme népérien :

   $\ln 0,05 = --0{,}0694t$ et enfin $t = \dfrac{\ln 0,05}{-0{,}0694} \approx 43,166$ soit 43,17 au centième près.

   b. On a $P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^{t} 0{,}0694\text{e}^{-0{,}0694x}\,\text{d}x = 1 - \text{e}^{-0{,}0694t}$, on a donc :

   $1 - \text{e}^{-0{,}0694t} = 0$ si $t = 43,17$, donc $P(X \leqslant 43,17) = 0,95$: la probabilité qu'il y ait un séisme majeur dans les 44 prochaines années est supérieur à 95 %.