# Corrigé du baccalauréat STI2D et STL
# Métropole–La Réunion – 6 septembre 2018

**EXERCICE 1** **4 points**

**1.** Une forme exponentielle du nombre complexe $-3+\text{i}\sqrt{3}$ est :

**a.** $-2\sqrt{3}\,\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}$ **b.** $2\sqrt{3}\,\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$ **c.** $\boxed{2\sqrt{3}\,\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}}$ **d.** $\sqrt{12}\,\text{e}^{-\text{i}\frac{5\pi}{6}}$

Soit $z=-3+\text{i}\sqrt{3}$ ; $|z|=\sqrt{(-3)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{9+3}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

Donc $z=2\sqrt{3}\left(\dfrac{-3}{2\sqrt{3}}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)=2\sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\text{i}\dfrac{1}{2}\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+\text{i}\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}\,\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}$

**Réponse c.**

**2.** On considère le nombre complexe $z=\dfrac{1}{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}$. Le nombre $z^2$ est :

**a.** un nombre réel

**b.** $\boxed{\text{un nombre complexe de partie réelle nulle}}$

**c.** un nombre complexe de module 1

**d.** un nombre complexe de partie imaginaire positive

$z=\dfrac{1}{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}$ donc $z^2=\left(\dfrac{1}{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}\right)^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\text{e}^{2\left(-\text{i}\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{1}{4}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{2}}=-\dfrac{1}{4}\text{i}$ imaginaire pur

**Réponse b.**

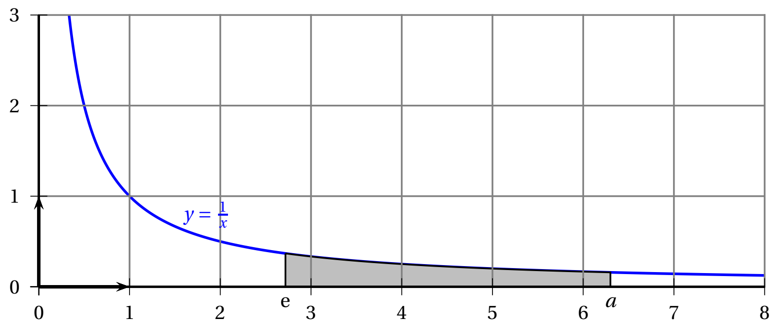
**3.** Une variable aléatoire $T$ suit la loi uniforme sur un intervalle de la forme $[2\,;\,x]$, où $x$ est un réel strictement supérieur à 2. Sachant que $P(2\leqslant T\leqslant 3)=\dfrac{1}{4}$, la valeur de $x$ est :

**a.** 2,25 **b.** $\boxed{6}$ **c.** 8 **d.** 10

$P(2\leqslant T\leqslant 3)=\dfrac{1}{4}\iff\dfrac{3-2}{x-2}=\dfrac{1}{4}\iff\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{4}\iff x-2=4\iff x=6$

**Réponse b.**

**4.** Sur le graphique ci-dessous, la surface grisée est délimitée par la courbe d'équation $y=\dfrac{1}{x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=\text{e}$ et $x=a$, où $a$ est un réel strictement supérieur à e.




La surface grisée a une aire strictement comprise entre 1 et 1,5 unité d'aire lorsque $a$ est égal à :

**a.** 2e **b.** $2\text{e}^2$ **c.** $\boxed{3\text{e}}$ **d.** $\text{e}^2$

La surface grisée a une aire $\mathcal{A}$ égale à $\displaystyle\int_{\text{e}}^{a}\frac{1}{x}\,\text{d}x=\left[\ln(x)\right]_{\text{e}}^{a}=\ln(a)-\ln(\text{e})=\ln(a)-1$.

On veut $1<\mathcal{A}<1{,}5$ donc $1<\ln(a)-1<1{,}5$ ce qui équivaut à $2<\ln(a)<2{,}5$.

La seule valeur de $a$ qui convienne est $a=3\text{e}$.

**Réponse c.**

**EXERCICE 2** **6 points**

Le benzène est un produit chimique liquide utilisé dans la fabrication de matières plastiques.

À la suite d'un incident le 10 juin 2018, une certaine quantité de benzène a été rejetée dans une rivière qui alimente en partie un bassin servant de base nautique. Les autorités sanitaires doivent s'occuper de la dépollution de la rivière tandis que le responsable de la base nautique s'occupe de celle du bassin.
Le benzène flotte à la surface de l'eau. Le responsable de la base nautique prélève un échantillon de liquide selon un protocole établi. Il détermine ainsi la concentration de benzène à la surface du bassin. Celle observée le 10 juin 2018 est de 68 microgrammes par litre. Le tableau suivant classe la qualité de l'eau selon la concentration de benzène, exprimée en microgrammes par litre ($\mu$g/L), dans un échantillon prélevé à la surface de l'eau.

| Concentration de benzène en $\mu$g/L | $[0\,;\,0{,}5[$ | $[0{,}5\,;\,5[$ | $[5\,;\,50[$ | $[50\,;\,5\,000[$ | $\geqslant 5\,000$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Qualité de l'eau | Excellente | Bonne | Moyenne | Médiocre | Mauvaise |

La toxicité du benzène par inhalation conduit le responsable à fermer la base nautique afin de préserver la santé des usagers, cette décision entraînant une perte de recette de 750 euros par jour. La base nautique pourra rouvrir lorsque la qualité de l'eau sera devenue excellente. Le responsable décide d'étudier deux solutions pour dépolluer le bassin : la première consiste à laisser le benzène s'éliminer sans intervention extérieure et la seconde consiste à filtrer l'eau au charbon actif.

**Partie A**

**Élimination du benzène de façon naturelle**

Dans cette partie, le responsable étudie l'évolution de la concentration de benzène à la surface du bassin sans intervention extérieure. Il estime que cette concentration diminue de manière naturelle de 7 % par jour, notamment par évaporation.

1. **a.** Le 10 juin 2018 la concentration de benzène est de 68 $\mu$g/L donc la qualité est médiocre.

   **b.** Le 11 juin 2018 la concentration aurait baissé de 7 % donc serait de $68 - 68 \times \dfrac{7}{100} = 63{,}24$ ; la qualité de l'eau serait toujours médiocre.

2. Pour tout entier naturel $n$, on note $u_n$ la concentration de benzène, en microgrammes par litre, à la surface du bassin $n$ jours après le 10 juin 2018.

   **a.** Chaque jour, la concentration diminue de 7 % ; diminuer de 7 %, c'est multiplier par $1 - \dfrac{7}{100} = 0{,}93$. Donc la suite $(u_n)$ est géométrique de raison $q = 0{,}93$.
   Le 10 juin 2018 la concentration est de 68 $\mu$g/L donc le premier terme de la suite est $u_0 = 68$.

   **b.** La suite $(u_n)$ est géométrique de raison $q = 0{,}93$ et de premier terme $u_0 = 68$ donc, pour tout entier naturel $n$, $u_n = u_0 \times q^n = 68 \times 0{,}93^n$.

   **c.** Le 15 juin 2018 correspond à $n = 5$ : $u_5 = 68 \times 0{,}93^5 \approx 47{,}3$.
   Or $47{,}3 \in [5\,;50[$ donc le 15 juin 2018 la qualité de l'eau est moyenne.

   **d.** La suite $(u_n)$ est géométrique de raison 0,93. Or $0 < 0{,}93 < 1$ donc la suite $(u_n)$ a pour limite 0.
   Cela signifie qu'au bout d'un certain temps, la concentration en benzène va tendre vers 0 donc que la qualité de l'eau va devenir excellente.

3. **a.** On propose ci-dessous la partie traitement de deux algorithmes.

| **Algorithme 1** | **Algorithme 2** |
|---|---|
| $u \leftarrow 68$ | $u \leftarrow 68$ |
| $n \leftarrow 0$ | $n \leftarrow 0$ |
| Tant que $u \geqslant 0{,}5$ | Tant que $u < 0{,}5$ |
| $u \leftarrow 0{,}93u$ | $u \leftarrow 0{,}93u$ |
| $n \leftarrow n+1$ | $n \leftarrow n+1$ |
| Fin Tant que | Fin Tant que |

Dans l'algorithme 2 la condition pour entrer dans la boucle est « $u < 0{,}5$ »; or la variable $u$ est initialisée à 68 donc on n'entre jamais dans la boucle et l'algorithme 2 affiche la valeur 0 pour $n$.

C'est donc l'algorithme 1 qui permet de déterminer le nombre de jours de fermeture avant que la qualité de l'eau soit devenue excellente.

**b.** On résout l'inéquation $68 \times 0{,}93^n < 0{,}5$ :

$$\begin{aligned} 68 \times 0{,}93^n < 0{,}5 &\iff 0{,}93^n < \frac{0{,}5}{68} \\ &\iff \ln(0{,}93^n) < \ln\left(\frac{0{,}5}{68}\right) \text{ (croissance de la fonction ln)} \\ &\iff n\ln(0{,}93) < \ln\left(\frac{0{,}5}{68}\right) \text{ (propriété de la fonction ln)} \\ &\iff n > \frac{\ln\left(\frac{0{,}5}{68}\right)}{\ln(0{,}93)} \text{ (car ln(0,95) < 0)} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{0{,}5}{68}\right)}{\ln(0{,}93)} \approx 67{,}7$ donc le plus petit entier $n$ tel que la concentration soit inférieure à $0{,}5\ \mu$g/L est 68.

**c.** Donc c'est à partir du 68e jour après le 10 juin 2018 que la qualité de l'eau sera redevenue excellente.

**d.** Si cette solution était retenue, la base serait fermée 67 jours donc la perte financière serait, en euros, de $68 \times 750 = 51\,000$.

**Partie B**

**Élimination du benzène par traitement au charbon actif**

Un procédé de filtration de l'eau de la base nautique au charbon actif permettrait d'éliminer plus rapidement le benzène présent à la surface du bassin. Le coût total de l'installation est de 20 000 euros.

Dans cette partie, le responsable étudie cette solution. L'action du filtre commencerait alors le 13 juin 2018. À la mise en service, à l'instant $t = 0$, le responsable estime que la concentration de benzène à la surface du bassin serait de 54,7 microgrammes par litre.

Il choisit de modéliser la concentration de benzène en microgrammes par litre à la surface du bassin, en fonction du temps $t$ exprimé en jours, par une fonction $f$, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ et vérifiant l'équation différentielle : $(E)\qquad y' + \dfrac{1}{4}y = 0$.

1. L'équation différentielle $y' + \dfrac{1}{4}y = 0$ est de la forme $y' + ay = 0$ qui a pour solutions $y = K\,\mathrm{e}^{-at}$ où $K$ est un réel quelconque.

   Donc $(E)$ a pour solutions les fonctions $f$ définies par $f(t) = K\,\mathrm{e}^{-0{,}25t}$ où $K$ est un réel quelconque.
2. En $t = 0$, la concentration du bassin est de $54{,}7\ \mu$g/L donc $f(0) = 54{,}7$ ce qui équivaut à $K\,\mathrm{e}^0 = 54{,}7$ ce qui donne $K = 54{,}7$.

   Donc pour tout $t \geqslant 0$, $f(t) = 54{,}7\,\mathrm{e}^{-0{,}25t}$.
3. La concentration de benzène dans l'eau 19 jours après la mise en service du filtre est $f(19) = 54{,}7\,\mathrm{e}^{-0{,}25\times19} \approx 0{,}47$.

   Cela veut dire que 19 jours après la mise en service du filtre, la qualité de l'eau est redevenue excellente.

**Partie C**

**Comparaison des deux solutions étudiées**

$f(18) \approx 0{,}61$ donc au bout de 18 jours après la mise en service du filtre, l'eau n'est pas de qualité excellente.

Elle devient excellente après 19 jours à compter du 13 juin, donc après 22 jours à compter du 10 juin, jour de la pollution

22 jours de fermeture coûtent $22 \times 750 = 16\,500$ € ; le coût total de la solution avec filtre est donc $20\,000 + 16\,500 = 36\,500$ €.
La solution avec utilisation d'un filtre à charbon est nettement plus judicieuse que l'autre.

**EXERCICE 3** **6 points**

Une société d'extraction de gravier reçoit une commande de 550 000 tonnes de gravier pour la construction d'un tronçon d'autoroute. Pour satisfaire cette commande, elle exploite un nouveau gisement de pierre.

Le responsable a recensé les masses journalières de gravier extraites de ce gisement au cours de son exploitation. La tendance observée et son expérience professionnelle le conduisent à modéliser la masse journalière de gravier extraite, exprimée en tonnes, par la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0 ; 600]$ par : $f(x) = \left(0{,}2x^2 + 30x\right) \mathrm{e}^{-0{,}01x}$ où $x$ désigne le temps écoulé en jours depuis le début de l'exploitation du gisement.

**Partie A**

1. **a.** Pour tout $x$ de l'intervalle $[0 ; 600]$,
$$\begin{aligned} f'(x) &= (0{,}2 \times 2x + 30)\,\mathrm{e}^{-0{,}01x} + \left(0{,}2x^2 + 30x\right) \times (-0{,}01)\,\mathrm{e}^{-0{,}01x} \\ &= \left(0{,}4x + 30 - 0{,}002x^2 - 0{,}3x\right) \mathrm{e}^{-0{,}01x} \\ &= \left(-0{,}002x^2 + 0{,}1x + 30\right) \mathrm{e}^{-0{,}01x} \end{aligned}$$

   **b.** Pour tout $x$ de l'intervalle $[0 ; 600]$,
$$\begin{aligned} 0{,}002(-x+150)(x+100)\,\mathrm{e}^{-0{,}01x} &= 0{,}002(-x^2 + 150x - 100x + 15\,000)\,\mathrm{e}^{-0{,}01x} \\ &= 0{,}002(-x^2 + 50x + 15\,000)\,\mathrm{e}^{-0{,}01x} \\ &= (-0{,}002x^2 + 0{,}1x + 30)\,\mathrm{e}^{-0{,}01x} \\ &= f'(x). \end{aligned}$$

2. **a.** On étudie le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 600]$.

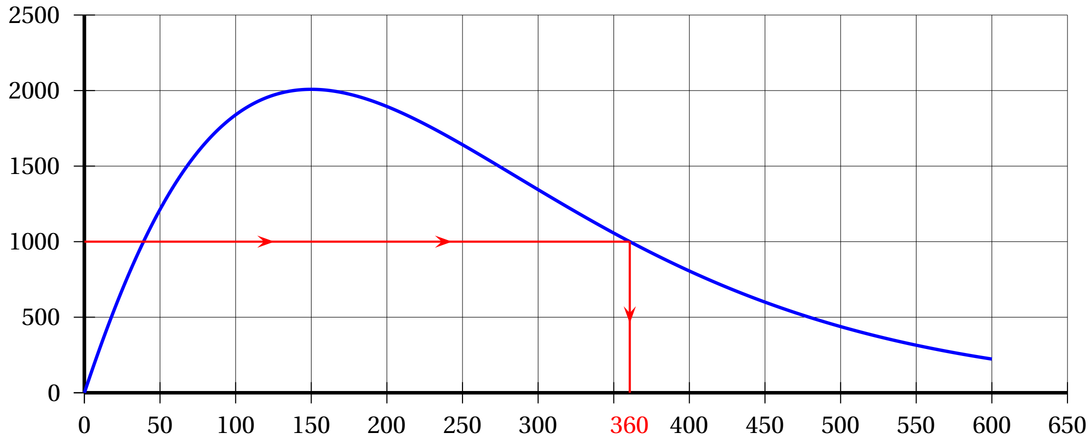
| $x$ | 0 | | 150 | | 600 |
|---|---|---|---|---|---|
| $-x+150$ | | + | 0 | − | |
| $x+100$ | | + | \| | + | |
| $\mathrm{e}^{-0{,}01x}$ | | + | \| | + | |
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |

   **b.** $f(0) = 0$, $f(150) \approx 2\,008$ et $f(600) \approx 223$
   On dresse le tableau de variations de $f$ sur l'intervalle $[0 ; 600]$.

| $x$ | 0 | | 150 | | 600 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | $\approx 2\,008$ | ↘ | $\approx 223$ |

   **c.** La masse journalière de gravier extraite sera maximale au bout de 150 jours et cette masse maximale sera d'environ 2 008 tonnes.

3. La courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous :




Après avoir atteint son maximum, la masse journalière de gravier extraite diminue.
La masse deviendra alors inférieure à 1 000 tonnes au bout de 360 jours.

**Partie B**

Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir les résultats suivants :

| | |
|---|---|
| 1 | $f(x) = \left(0{,}2 * x^2 + 30 * x\right) * \exp(-0{,}01 * x)$ |
| | $\left(0{,}2x^2 + 30x\right)\exp(-0{,}01x)$ |
| 2 | intégrer $(f(x),x)$ |
| | $\left(-20x^2 - 7\,000x - 700\,000\right)\exp(-0{,}01x)$ |
| 3 | intégrer $(f(x),x,0,600)$ |
| | $-12\,100\,000\exp(-6) + 700\,000$ |
| 4 | approcher(intégrer $(f(x),x,0,600)$) |
| | 670 007,098 662 |

**1.** **a.** Le résultat fourni par le logiciel en ligne 2 donne une primitive de la fonction $f$. Si on appelle $F$ cette primitive, on a $F(x) = \left(-20x^2 - 7\,000x - 700\,000\right)\,\mathrm{e}^{-0{,}01x}$.

**b.** Une valeur approchée de la masse totale de gravier extraite, en tonnes, entre le début de l'exploitation et le 600$^{\text{e}}$ jour d'exploitation est donnée par : $I = \displaystyle\int_0^{600} f(x)\,\mathrm{d}x$.

D'après la ligne 4 du logiciel de calcul formel, $I = \displaystyle\int_0^{600} f(x)\,\mathrm{d}x \approx 670\,007$.

Au bout de 600 jours on aura extrait environ 670 007 tonnes ce qui est supérieur à 550 000 tonnes, ce qui permet d'honorer la commande.

**2.** Le responsable du chantier d'extraction estime que la commande sera satisfaite au bout de 400 jours.

La masse extraite au bout de 400 jours est

$$\begin{aligned}\int_0^{400} f(x)\,\mathrm{d}x &= \left[F(x)\right]_0^{400} = F(400) - F(0)\\ &= \left(\left(-20 \times 400^2 - 7\,000 \times 400 - 700\,000\right)\,\mathrm{e}^{-0{,}01\times 400}\right) - \left((-700\,000)\,\mathrm{e}^{0}\right)\\ &= -6\,700\,000\,\mathrm{e}^{-4} + 700\,000 \approx 577\,285 > 550\,000\end{aligned}$$

Donc la commande peut être satisfaite au bout de 400 jours.

**EXERCICE 4** **4 points**

**Partie A**

**1.** Lors de la conception d'un avion, les techniciens cherchent à optimiser l'espacement entre les rangées de sièges. L'espace minimal de confort, exprimé en centimètres, pour les jambes d'un passager adulte peut être modélisé par une variable aléatoire $L$ qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 55$ et d'écart type $\sigma = 5$.

Un passager adulte est choisi au hasard.

**a.** La probabilité que l'espace minimal de confort de ce passager soit compris entre 48 cm et 62 cm est $P(48 \leqslant L \leqslant 62) \approx 0{,}838$.

**b.** La probabilité que l'espace minimal de confort de ce passager soit supérieur à 67 cm est $P(L > 67) \approx 0{,}008$.

**2.** Sur cet avion comportant 334 sièges, les techniciens fixent l'espace entre deux rangées consécutives à 65 cm. La probabilité qu'un client adulte prenne place confortablement est alors égale à 0,977.

On choisit au hasard un échantillon de 334 personnes adultes pour prendre place dans cet avion. Le nombre de passagers confortablement installés peut être modélisé par une variable aléatoire $X$.

**a.** On admet que la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale.
Les paramètres de cette loi sont $n = 334$ et $p = 0{,}977$.

**b.** L'espérance mathématique de la variable aléatoire $X$ est $np = 334 \times 0{,}977 \approx 326$ donc, en moyenne, dans un tel avion, 326 personnes pourraient s'asseoir confortablement.

**c.** $P(X \geqslant 330) \approx 0{,}051$

Dans un tel avion, la probabilité qu'au moins 330 personnes puissent s'asseoir confortablement est de 0,051.

**Partie B**

Par expérience, la compagnie estime que la probabilité qu'un passager ayant réservé une présente à l'embarquement est égale à 0,9.
La compagnie a accepté un nombre $n$ de réservations supérieur ou égal à 335 pour 334 sièges disponibles. On suppose par ailleurs que les comportements des passagers sont indépendants les uns des autres.
On note $Y$ la variable aléatoire égale au nombre de passagers se présentant effectivement.
$Y$ suit la loi binomiale de paramètres $n$ et $p = 0{,}9$. Dans le tableau ci-dessous, on donne, pour quelques valeurs de $n$ supérieures à 335, la probabilité $p_n$ qu'il y ait plus de personnes à l'embarquement que de places disponibles.

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | Nombre $n$ de places vendues | $p_n$ |
| 2 | 353 | 0,000 6 |
| 3 | 354 | 0,001 2 |
| 4 | 355 | 0,002 3 |
| 5 | 356 | |
| 6 | 357 | 0,007 0 |
| 7 | 358 | 0,011 5 |
| 8 | 359 | 0,018 3 |
| 9 | 360 | 0,028 0 |
| 10 | 361 | 0,041 4 |
| 11 | 362 | 0,059 4 |
| 12 | 363 | 0,082 6 |
| 13 | 364 | 0,111 6 |
| 14 | 365 | 0,146 8 |
| 15 | 366 | 0,188 3 |

1. On cherche une valeur approchée à $10^{-4}$ près de la valeur manquante de la cellule B5 de ce tableau.

   Dans ce cas, la variable aléatoire $Y$ suit la loi binomiale de paramètres $n = 356$ et $p = 0,9$.
   On cherche $p_{356} = P(Y > 334)$ ; on trouve à la calculatrice 0,0041.

2. La compagnie souhaite que le risque d'avoir plus de passagers que de sièges le jour de l'embarquement soit inférieur à 2,5 %.

   On cherche donc $n$ pour que $p_n < 0,025$ ; d'après le tableau, on peut prendre $n \leqslant 359$.

   Pour que le risque d'avoir plus de passagers que de sièges le jour de l'embarquement soit inférieur à 2,5 %, la compagnie doit prendre au maximum 359 passagers.