∽ Corrigé du baccalauréat STI2D & STL/SPCL ∾ Métropole – 10 septembre 2019

Exercice 1 — 4 points

1. $P(X \leqslant 5) = \dfrac{5-2}{12-2} = \dfrac{3}{10}$.
2. **a.** 0,4 **b.** 1,8 **c.** 0,6 **d.** 0,82

   18 est inférieur à l'espérance 20, donc la probabilité est inférieure à 0,5.
   Mathématiquement : $P(X \leqslant 18) = P(X \leqslant 20) - P(18 \leqslant 18 \leqslant 20) = 0{,}5 - P(18 \leqslant 18 \leqslant 20) < 0{,}5$.
3. On sait que $E = 5 = \dfrac{1}{\lambda} \iff \lambda = \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{10} = 0{,}2$.
4. $|2-2\text{i}|^2 = 4+4 = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$, donc $|2-2\text{i}| = 2\sqrt{2}$.
   $2-2\text{i} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + \text{i}\sin\frac{-\pi}{4}\right) = 2\text{e}^{-\frac{\pi}{4}}$.
   Donc l'argument du nombre proposé est égal à la somme des arguments des facteurs soit, $-\frac{\pi}{4}$, 0 et $\frac{\pi}{2}$, soit $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 2 — 6 points

Partie A

1. Retrancher 0,5 %, c'est multiplier par $1 - 0{,}005 = 0{,}995$.
   Donc $u_1 = u_0 \times 0{,}995 = 4\,000 \times 0{,}995 = 3\,980$.
2. 20 cm = 2 dm. Donc le flux au bout de 20 cm est égal à $u_2 = u_1 \times 0{,}095 = 3\,960{,}10$.
3. Retrancher 0,05 %, c'est multiplier par 0,995 : la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,995, de premier terme $u_0 = 4\,000$.
4. On sait que quel que soit le naturel n, $u_n = u_0 \times 0{,}995^n = 4\,000 \times 0{,}995^n$.
5. 2 m = 20 dm. Le flux au bout de 2 m est donc égal à $u_{20} = 4\,000 \times 0{,}995^{20} \approx 3\,618{,}44$, donc plus de 3 600 lumens.
6. réel.

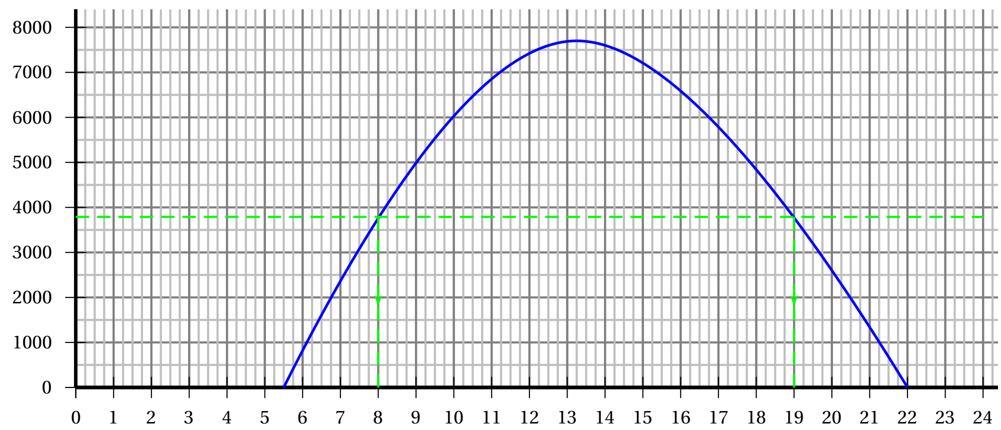
   a. On trouve à la calculatrice $n = 58$.
   Rem. Méthode mathématique :
   On résout $4\,000 \times 0{,}995^n \leqslant 3\,000 \iff 0{,}995^n \leqslant \dfrac{3}{4}$.
   Avec $\dfrac{3}{4} = 0{,}75$, $0{,}995^n \leqslant 0{,}75 \iff n\ln 0{,}995 \leqslant \ln 0{,}75$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) $\iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}75}{\ln 0{,}995}$ (car $\ln 0{,}995 < 0$).
   Or $\dfrac{\ln 0{,}75}{\ln 0{,}995} \approx 57{,}4$.
   Le premier entier solution est $n = 58$.

   b. u_{58} est le flux au bout d'un conduit de $5{,}8 \times 10 = 58$ m.
   Le résultat précédent signifie qu'à la sortie d'un conduit de 58 m, le flux lumineux sera inférieur à 3 000 lumens.

Partie B

1. Avec une déperdition de 0,05 % par dm ; il faut trouver un flux minimal v_0 tel que :
$v_0 \times 0{,}995^{40} \geqslant 3\,100 \iff v_0 \geqslant \dfrac{3\,100}{0{,}995^{40}}$.
On a $\dfrac{3\,100}{0{,}995^{40}} \approx 3\,788{,}25$, donc à l'unité près au moins 3 789 lumens.

2.



Le flux lumineux à l'entrée du conduit est suffisant entre 8 et 19 h.

Exercice 3 — 5 points

$$(E)\ :\ y' + 0{,}12y = 0{,}003.$$

À l'instant $t = 0$, la concentration d'octane dans la cuve est de 0,5 mole par litre (mol.L^{-1}).

1. **a.** On sait que la solution générale de l'équation différentielle (E) est de la forme :

$$f(t) = -\frac{0{,}003}{0{,}12} + K\mathrm{e}^{-0{,}12t} = 0{,}025 + K\mathrm{e}^{-0{,}12t}, K \in \mathbb{R}.$$

b. On sait que $f(0) = 0{,}5 \iff 0{,}025 + K\mathrm{e}^{-0{,}12\times 0} = 0{,}5 \iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) $K = 0{,}475$.

c. On a donc pour $t \geqslant 0$, $\quad f(t) = 0{,}475\,\mathrm{e}^{-0{,}12t} + 0{,}025$.

2. **a.** f étant une solution de l'équation différentielle, on a donc :
$f'(t) = 0{,}003 - 0{,}12f(t) = 0{,}003 - 0{,}12\left(0{,}475\,\mathrm{e}^{-0{,}12t} + 0{,}025\right) = 0{,}003 - 0{,}475\,\mathrm{e}^{-0{,}12t} - 0{,}03 = -0{,}057\,\mathrm{e}^{-0{,}12t}$.

• On pouvait également dériver l'expression trouvée de $f(t)$:
$f'(t) = -0{,}12 \times 0{,}475\,\mathrm{e}^{-0{,}12t} = -0{,}057\,\mathrm{e}^{-0{,}12t}$.

b. Comme $\mathrm{e}^{-0{,}12t} > 0$, quel que soit le réel t, $f'(t)$ est du signe de $-0{,}057$, donc $f'(t) < 0$ en particulier sur $[0\ ;\ +\infty[$.
Conclusion : f est décroissante sur cet intervalle.

c. Le résultat précédent montre que la concentration va baisser à partir de 0,5.
Comme on sait que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}12t} = 0$, et donc qu'aussi $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} 0{,}475\,\mathrm{e}^{-0{,}12t} = 0$, la concentration va décroitre de 0,5 à 0,025.

3. Il faut résoudre l'équation :
$f(t) = 0{,}25 \iff 0{,}475\,\mathrm{e}^{-0{,}12t} + 0{,}025 = 0{,}25 \iff 0{,}475\,\mathrm{e}^{-0{,}12t} = 0{,}225 \iff \mathrm{e}^{-0{,}12t} = \dfrac{0{,}225}{0{,}475} \iff \mathrm{e}^{-0{,}12t} = \dfrac{9}{19} \iff -0{,}12t = \ln\frac{9}{19} \iff t = \dfrac{\ln\frac{9}{19}}{-0{,}12}$.
Or $\dfrac{\ln\frac{9}{19}}{-0{,}12} \approx 6{,}227$. Il faut donc un peu plus de 6 minutes pour avoir une concentration de 0,25 mole par litre.

4. **a.** Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} -0{,}12t = -\infty$, on sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} \text{e}^{-0{,}12t} = 0$ et par conséquent $\lim\limits_{t\to+\infty} 0{,}475\text{e}^{-0{,}12t} = 0$, donc finalement :

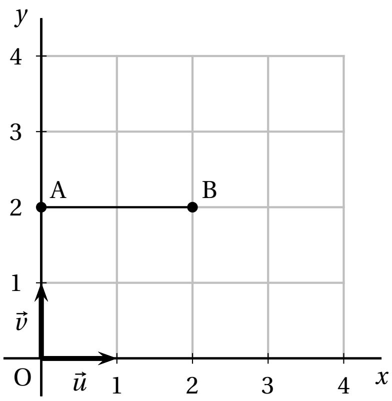
$\lim\limits_{t\to+\infty} \text{e}^{-0{,}12t} + 0{,}025 = 0{,}025$. Au bout d'un certain temps la concentration en octane va se rapprocher de 0,025.

b. Au bout d'une heure (60 min), la concentration en octane est égale à :

$f(60) = 0{,}475\text{e}^{-0{,}12\times60} + 0{,}025 \approx 0{,}025355$, donc très proche de la valeur 0,025. Il est donc inutile de continuer le processus après une heure.

Exercice 4 — 5 points

1. **a.**



b. On a $z_{\text{B}} = 2 + 2\text{i}$.

On a $|z_{\text{B}}|^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$, d'où $|z_{\text{B}}| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

En factorisant ce module on a $z_{\text{B}} = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$ (d'après l'énoncé).

2. On a vu que $\text{OB} = |z_{\text{B}}| = 2\sqrt{2} \approx 2{,}828$; donc $\text{OB} > 2{,}5$. La réponse est oui.

3. **a.** Le triangle OAB est rectangle en A isocèle puisque $\text{OA} = \text{AB} = 2$.

On a donc d'après le théorème de Pythagore : $\text{OA}^2 + \text{AB}^2 = \text{OB}^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$, donc $\text{OB} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

b. Puisque $|z_{\text{B}}| = |z_{\text{C}}| = 2\sqrt{2}$, B pourra atteindre le point C.

c. On a vu que le triangle OAB est rectangle isocèle en A, donc $\left(\widehat{\text{BOA}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Donc $\left(\overrightarrow{\text{O}x}, \overrightarrow{\text{OA}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{O}x}, \overrightarrow{\text{OC}}\right) + \widehat{\text{COA}} = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{3\pi}{12} = \dfrac{4\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3}$.