Corrigé du baccalauréat STI2D et STL/SPCL
Polynésie – 4 septembre 2018

Exercice 1 **4 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.
On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Le nombre complexe solution de l'équation $3\mathrm{i}z + 1 = \mathrm{i}$ est :

a. $z = -1 - 2\mathrm{i}$ **b.** $\boxed{z = \frac{1}{3} + \frac{\mathrm{i}}{3}}$

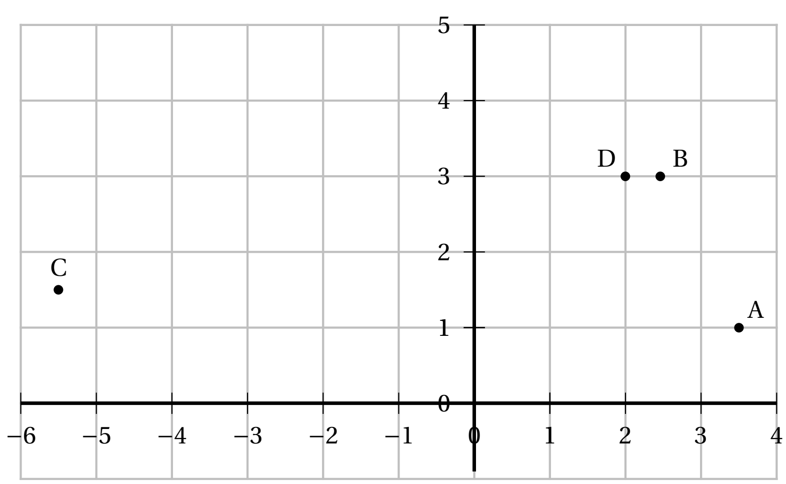
c. $z = -\frac{1}{3}$ **d.** $z = \frac{-1-\mathrm{i}}{3}$

$3\mathrm{i}z + 1 = \mathrm{i} \iff 3\mathrm{i}z = -1 + \mathrm{i} \iff z = \frac{-1+\mathrm{i}}{3\mathrm{i}} \iff z = \frac{-\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{3\mathrm{i}^2} \iff z = \frac{-1-\mathrm{i}}{-3}$
$\iff z = \frac{1}{3} + \frac{\mathrm{i}}{3}$

Réponse b.

2. On considère les deux nombres complexes $z = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ et $z' = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.
Sur le graphique ci-dessous, le nombre $z + z'$ est représenté par le point :

a. A **b.** $\boxed{\text{B}}$ **c.** C **d.** D



$z = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}$

$z' = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + \mathrm{i}$

$z + z' = 2\sqrt{3} + 2\mathrm{i} + -1 + \mathrm{i} = 2\sqrt{3} - 1 + 3\mathrm{i} = z_{\mathrm{B}}$

Réponse b.

3. On considère la fonction f définie sur $I = \left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{2}{2x+1}$.

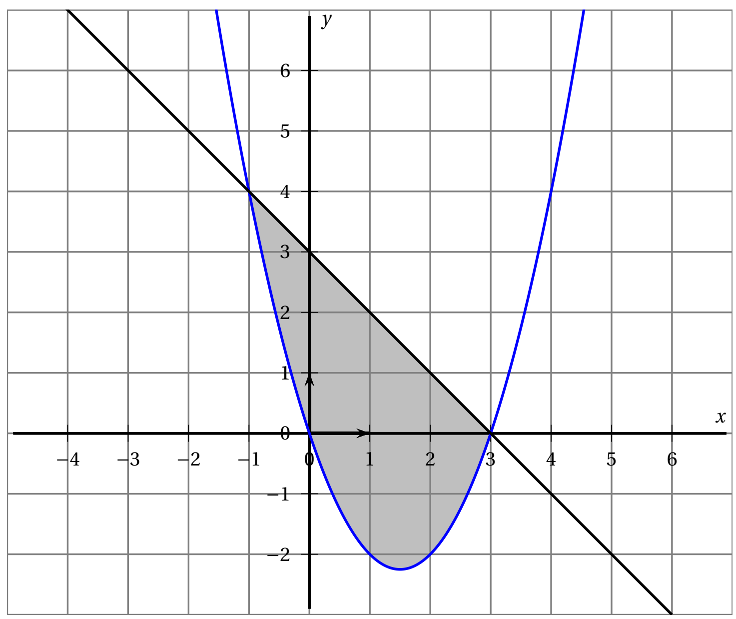
Une primitive de f sur I est la fonction F définie par :

a. $F(x) = 2\ln(2x+1)$ **b.** $F(x) = \dfrac{-4}{(2x+1)^2}$

c. $F(x) = \dfrac{2x}{x^2+x}$ **d.** $\boxed{F(x) = \ln(2x+1)}$

On trouve la bonne réponse en dérivant les quatre fonctions F proposées.
On sait que la dérivée de $\ln\big(u(x)\big)$ est $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ donc la dérivée de la fonction F définie par $F(x) = \ln(2x+1)$ est la fonction F' définie par $F'(x) = \dfrac{2}{2x+1}$.
Réponse d.

4. Le graphique ci-dessous donne, dans un repère orthogonal, la représentation graphique des fonctions f et g définies sur l'ensemble des réels par : $f(x) = x^2 - 3x$ et $g(x) = 3 - x$.



On souhaite connaître l'aire du domaine grisé. Cette aire, en unité d'aire, est égale à :

a. $\displaystyle\int_{-1}^{3} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ **b.** $\displaystyle\int_{0}^{3} [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x$

c. $\displaystyle\int_{-1}^{3} \left[-x^2 - 4x + 3\right]\,\mathrm{d}x$ **d.** $\boxed{\displaystyle\int_{-1}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x}$

D'après la définition de l'intégrale, la bonne réponse est la
Réponse d.

Exercice 2 **5 points**

Un pâtissier utilise une machine pour fabriquer des gâteaux au chocolat pesant en moyenne500 grammes. Pour être commercialisable, un gâteau doit peser entre 485 grammes et 515 grammes.

La masse, en gramme, d'un gâteau au chocolat peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 500$ et d'écart type $\sigma = 11$.

Partie A

1. La probabilité que la masse d'un gâteau au chocolat soit supérieure à 515 grammes est $P(X > 515) \approx 0{,}086$.
2. La probabilité p qu'un gâteau au chocolat choisi au hasard dans la fabrication soit commercialisable est $P(485 < X < 515) \approx 0{,}827$.
3. Le pâtissier trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de fabrication afin de faire varier la valeur de l'écart type sans modifier celle de l'espérance μ.
   On désigne par Y la nouvelle variable aléatoire modélisant la masse, en gramme, d'un gâteau au chocolat.
   Cette variable aléatoire suit la loi normale d'espérance $\mu = 500$ et d'écart-type σ'.
   On veut que la probabilité qu'un gâteau au chocolat soit commercialisable ait pour valeur approchée 0,95, autrement dit que $P(485 < Y < 515) \approx 0{,}95$, sachant que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne $\mu = 500$ et d'écart-type σ'.
   On doit avoir $P(485 < Y < 515) \approx 0{,}95$ ce qui équivaut à $P(500-15 < Y < 500+15) \approx 0{,}95$ ou encore $P(\mu - 15 < Y < \mu + 15) \approx 0{,}95$.
   D'après le cours, on sait que $P(\mu - 2\sigma' < Y < \mu + 2\sigma') \approx 0{,}95$; donc on peut déduire que $2\sigma' = 15$ donc que $\sigma' = 7{,}5$.

Partie B

Le pâtissier utilise une balance électronique. La durée de fonctionnement sans dérèglement, en jour, de cette balance est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.

1. On admet que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est égale à 0,913.
   On sait que si T suit la loi exponentielle de paramètre λ, alors
   $P(T < a) = \displaystyle\int_0^a \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{\lambda t}\right]_0^a = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$ donc $P(T > a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$.
   La probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est égale à 0,913 donc $P(T > 30) = 0{,}913$; d'où on déduit que $\mathrm{e}^{-30\lambda} = 0{,}913$ ce qui équivaut à $-30\lambda = \ln(0{,}913)$ ou encore à $\lambda = -\dfrac{\ln(0{,}913)}{30}$. On en déduit que $\lambda \approx 0{,}003$.

Dans la suite on prendra $\lambda = 0{,}003$.

2. La probabilité que la balance électronique se dérègle durant les 90 premiers jours est $P(T \leqslant 90) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \times 90} = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}003\times 90} \approx 0{,}237$.
3. Le vendeur de cette balance électronique a assuré au pâtissier qu'il y a une chance sur deux que la balance ne se dérègle pas avant 365 jours.
   Il faut donc chercher $P(T < 365)$ puis comparer le résultat à 0,5.
   $P(T < 365) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}003\times 365} \approx 0{,}665 > 0{,}5$ donc il y a plus d'une chance sur deux que la balance se dérègle avant 365 jours ; le vendeur a tort.

Exercice 3 **5 points**

La consommation de soins et de biens médicaux (CSBM) en France comprend les soins hospitaliers, les soins ambulatoires (médecins, dentistes, auxiliaires médicaux, laboratoires d'analyse, thermalisme), les transports sanitaires, les médicaments et les autres biens médicaux (optique, prothèses, petit matériel et pansements).

Partie A

En 2008, la CSBM s'élevait à 164,7 milliards d'euros. Afin de mieux maîtriser les dépenses de santé, le Gouvernement souhaitait que les dépenses liées à la CSBM n'augmentent que de 2 % par année.
On modélise l'évolution souhaitée par le Gouvernement par une suite (u_n) où u_n désigne le montant, en milliards d'euros, des dépenses pour l'année $(2008+n)$.
On a donc $u_0 = 164{,}7$.

1. Augmenter de 2 %, c'est multiplier par $1+\dfrac{2}{100} = 1{,}02$. On a donc, pour tout n, $u_{n+1} = 1{,}02u_n$.
   La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 1{,}02$ et de premier terme $u_0 = 164{,}7$.
2. On en déduit que pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n = 164{,}7 \times 1{,}02^n$.
3. $u_7 = 164{,}7 \times 1{,}02^7 \approx 189{,}2$.
4. Cela signifie que en $2008+7$ soit en 2015, le total des dépenses sera d'environ 189,2 milliards d'euros.

Partie B

Le tableau suivant, extrait d'une feuille d'un tableur, donne la CSBM réelle en milliards d'euros depuis l'année 2008 en France.
Dans cette partie, on ne demande pas de compléter le tableau.

Consommation de soins et de biens médicaux à partir de 2008

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Année	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
2	CSBM en milliards d'euros	164,7	169,8	173,5	178,7	182,6	186,1	191,2	194,0
3	Évolution en pourcentage								

Source : Drees, comptes de la santé (édition 2016)

1. **a.** Le pourcentage d'évolution de la CSBM entre les années 2008 et 2015 arrondi à 0,01 % est $\dfrac{194{,}0-164{,}7}{164{,}7} \times 100 \approx 17{,}79$.

   b. Les cellules C3 à I3 sont au format pourcentage. La formule à entrer en C3 qui, recopiée vers la droite jusqu'en I3, permet de déterminer le taux d'évolution en pourcentage des dépenses entre deux années consécutives est `= (C2 - B2) / B2`.
2. À partir de 2015, on suppose que la CSBM augmentera de 2,4 % par année, donc on multiplie chaque année par $1+\dfrac{2{,}4}{100} = 1{,}024$.
   On veut déterminer, à l'aide de l'algorithme ci-dessous, l'année à partir de laquelle la CSBM dépassera 300 milliards d'euros.

   a. L'algorithme complété est :

```
N ← 0
V ← 194
Tant que V ⩽ 300
    N ← N + 1
    V ← V × 1,024
Fin Tant que
```

b. Le plus efficace pour déterminer la valeur de la variable N après exécution de l'algorithme est de programmer sur calculatrice la fonction f définie par $f(x) = 194 \times 1{,}024^x$ puis de faire afficher le tableau de valeurs de cette fonction.

On peut également résoudre l'inéquation $194 \times 1{,}024^n > 300$:

$$194 \times 1{,}024^n > 300 \iff 1{,}024^n > \frac{300}{194} \iff \ln\left(1{,}024^n\right) > \ln\left(\frac{300}{194}\right)$$
$$\iff n\ln(1{,}024) > \ln\left(\frac{300}{194}\right) \iff n > \frac{\ln\left(\frac{300}{194}\right)}{\ln(1{,}024)}$$

$\dfrac{\ln\left(\frac{300}{194}\right)}{\ln(1{,}024)} \approx 18{,}4$ donc la valeur de N en sortie d'algorithme est 19.

c. La CSBM dépassera les 300 milliards d'euros en $2015 + 19$ soit en 2034.

Exercice 4 — 6 points

Partie A

On considère la fonction w définie pour tout réel positif t par : $w(t) = 4\,\mathrm{e}^{-200t} + 146$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction w dans un repère orthonormé.

1. **a.** $w(0) = 4\,\mathrm{e}^0 + 146 = 4 + 1'6 = 150$.

b. On détermine la limite de la fonction w lorsque t tend vers $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -200t = -\infty \\ \text{on pose } T = -200t \\ \displaystyle\lim_{T\to-\infty} \mathrm{e}^T = 0\end{array}\right\}\ \text{donc } \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-200t} = 0 \text{ et donc } \lim_{t\to+\infty} w(t) = 146.$$

On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $y = 146$ comme asymptote horizontale e, $+\infty$.

2. On note w' la fonction dérivée de la fonction w sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

a. Pour tout réel positif t, $w'(t) = 4 \times (-200)\,\mathrm{e}^{-200t} + 0 = -800\,\mathrm{e}^{-200t}$.

b. Pour tout x réel, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $-800\,\mathrm{e}^{-200t} < 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$. La fonction x est donc strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

c. On dresse le tableau de variation de la fonction w sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$:

t	0	$+\infty$
$w'(t)$	$-$	
$w(y)$	150 ↘	146

d. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a a pour équation $y = w'(a)(t-a) + w(a)$.
Pour $a = 0$, on a $w(0) = 150$ et $w'(0) = -800\,\mathrm{e}^0 = -800$.
Donc la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = -800t + 150$.

Partie B

On étudie l'évolution de la vitesse d'un moteur dont la vitesse de rotation à vide est de 150 rad.s^{-1}.
On s'intéresse à une phase particulière appelée phase d'embrayage.

Durant cette phase, la vitesse de rotation du moteur, exprimée en rad.s^{-1}, est modélisée par une fonction solution de l'équation différentielle (E) : $\dfrac{1}{200}y' + y = 146$
où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle t positive et exprimée en seconde.

1. **a.** $\dfrac{1}{200}y' + y = 146 \iff y' + 200y = 146 \times 200$ est une équation différentielle de la forme $y' + ay = b$ dont les solutions sont les fonctions $y = K\,\text{e}^{-at} + \dfrac{b}{a}$ où K est un réel quelconque.

L'équation différentielle $\dfrac{1}{200}y' + y = 146$ a donc pour solutions les fonctions $y = K\,\text{e}^{-200t} + 146$ où K est un réel quelconque.

b. Si pour $t = 0$, $y = 150$, alors $150 = K\,\text{e}^{0} + 146$ donc $K = 150 - 146 = 4$.

Donc la fonction w définie par $w(t) = 4\,\text{e}^{-200t} + 146$ est la fonction solution de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $w(0) = 150$.

2. La limite de $w(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ est égale à 146, et la fonction w est strictement décroissante donc, pendant la phase d'embrayage, la vitesse va diminuer pour atteindre 146 rad.s^{-1}.

3. On considère que la vitesse de rotation du moteur, exprimée en rad.s^{-1}, est stabilisée lorsque la quantité $\dfrac{w(t) - 146}{146}$ est inférieure à 0,01.

On résout l'inéquation $\dfrac{w(t) - 146}{146} < 0{,}01$:

$$\dfrac{w(t) - 146}{146} < 0{,}01 \iff 4\,\text{e}^{-200t} + 146 - 146 < 1{,}46 \iff \text{e}^{-200t} < \dfrac{1{,}46}{4} \iff -200t < \ln\left(\dfrac{1{,}46}{4}\right)$$

$$\iff t > -\dfrac{\ln(0{,}365)}{200}$$

Le temps mis par le moteur pour stabiliser sa vitesse est $t = -\dfrac{\ln(0{,}365)}{200}$ soit environ 0,005 seconde.