Durée : 4 heures

∽ Corrigé du baccalauréat Polynésie 9 juin 2016 ∽
STI2D–STL spécialité SPCL

EXERCICE 1 **3 points**

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point. Pour répondre, vous recopierez **sur votre copie** le numéro de la question et la seule réponse choisie.*

Dans cet exercice, i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. L'écriture exponentielle du nombre complexe $z = \dfrac{-3\text{i}}{1+\text{i}}$ est :

a. $\cancel{z = \frac{3\sqrt{2}}{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{5\pi}{4}}}$ **b.** $\cancel{z = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{4}}}$ **c.** $\boxed{z = \frac{3\sqrt{2}}{2}\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{4}}}$ **d.** $\cancel{z = \frac{3\sqrt{2}}{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}}$

2. Soit f la fonction définie pour tout réel t positif par : $f(t) = 8\text{e}^{-0,12t} + 11$. La valeur moyenne de f arrondie à 10^{-1} sur l'intervalle $[0 ; 24]$ est :

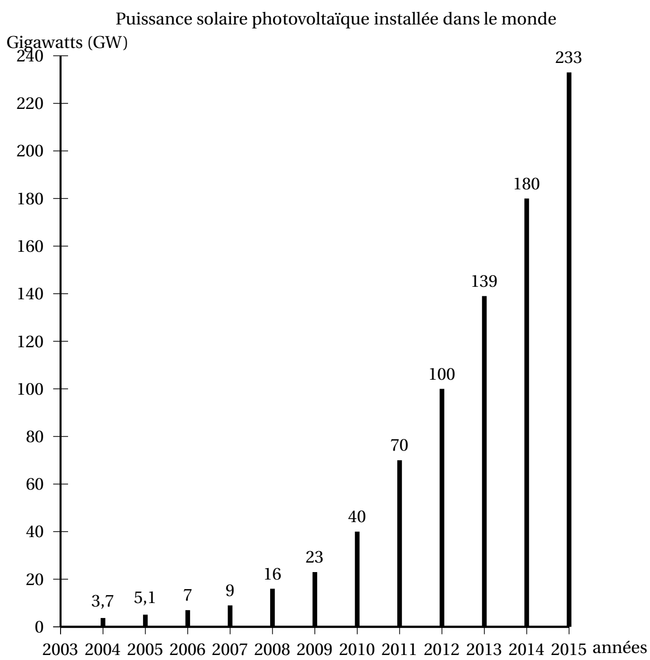
a. ~~15,2~~ **b.** $\boxed{13,6}$ **c.** ~~16,7~~ **d.** ~~11,2~~

3. On donne dans un repère orthonormé les points : A(0 ; 2) ; B(1 ; 3) ; C(−2 ; 1) et D(−1 ; 0). Le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{CD}}$ est égal à :

a. $\boxed{\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{CD}} = 0}$ **b.** $\cancel{\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{CD}} = \overrightarrow{0}}$ **c.** $\cancel{\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{CD}} = -2}$ **d.** $\cancel{\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{CD}} = \overrightarrow{\text{AD}}}$

EXERCICE 2 **6 points**

L'énergie photovoltaïque voit son coût baisser de façon importante depuis plusieurs années, ce qui engendre une croissance forte de ce secteur. L'évolution de la puissance solaire photovoltaïque installée dans le monde entre fin 2004 et fin 2015 est résumée dans le graphique ci-dessous :



1. Calculons les pourcentages d'augmentation annuels entre 2013 et 2014 ainsi qu'entre 2014 et 2015.

Le taux t est défini par $\dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$.

entre 2013 et 2014 : $t = \dfrac{180-139}{139} \approx 0{,}294\,96$, entre 2014 et 2015 : $t = \dfrac{233-180}{180} \approx 0{,}294\,4$.

Le pourcentage d'augmentation annuel entre 2013 et 2014 est, à 0, 1 % près, d'environ 29,5 % et entre 2014 et 2015 d'environ 29,4 %.

2. On se propose d'estimer la puissance solaire photovoltaïque installée dans le monde dans les 15 ans à venir, si le taux de croissance annuel reste constant et égal à 30 %.

On note P_n la puissance solaire photovoltaïque installée dans le monde, en GW, à la fin de l'année 2015 + n. On a ainsi $P_0 = 233$.

a. À un taux d'augmentation de 30 % correspond un coefficient multiplicateur de 1,30.
$P_1 = 233 \times 1{,}30 = 302{,}9$ puis $P_2 = 302{,}9 \times 1{,}3 = 393{,}8$ (les résultats sont arrondis au dixième).

b. $P_{n+1} = P_n \times 1{,}3$.

c. Chaque terme se déduisant du précédent en le multipliant par un même nombre, la suite (P_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}3$ et de premier terme $P_0 = 233$.

d. Le terme général d'une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 est
$u_n = u_0 q^n$.
$P_n = 233 \times (1{,}30)^n$.

e. La puissance solaire photovoltaïque, en GW, installée dans le monde fin 2025 (2015+10) est alors P_{10}. $P_{10} = 233 \times (1{,}3)^{10} \approx 3\,212$ (arrondi à l'unité).

f. Le taux d'évolution global est $\dfrac{3212-233}{233} \approx 12{,}785\,4$
Le pourcentage global d'augmentation de cette puissance solaire mondiale entre 2015 et 2025 est, arrondi à l'unité,1 279 %).

3. On veut déterminer l'année durant laquelle la puissance solaire photovoltaïque installée dans le monde atteindrait 16 000 GW. Pour atteindre cette puissance, les panneaux photovoltaïques occuperaient au sol l'équivalent d'un carré de 400 km de côté et suffiraient pour produire toute l'électricité consommée dans le monde (consommation domestique, industrielle et des transports).

a. On considère l'algorithme ci-dessous.
Complétons les lignes 3 et 7 afin que cet algorithme réponde à la question posée.

```
1/  Affecter à N la valeur 0
2/  Affecter à P la valeur 233
3/  Tant que P<16 000
4/  Affecter à N la valeur N+1
5/  Affecter à P la valeur P × 1,30
6/  Fin Tant que
7/  Afficher N+2015
```

b. En faisant tourner cet algorithme complété, déterminons l'année durant laquelle la puissance solaire photovoltaïque installée dans le monde dépasserait 16 000 GW.

N	0	...	11	12	13	14	15	16	17
P	233	...	4 156	5 428	7 057	9 174	11 926	15 504	20 155
$P < 16000$	vraie	...	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	fausse

L'algorithme affiche alors 2032.

L"année durant laquelle la puissance solaire photovoltaïque installée dans le monde dépasserait 16 000 GW serait 2032.

c. Une autre méthode, directe et non algorithmique, pour répondre à la question précédente serait la résolution de l'inéquation $P \geqslant 16000$.

$233 \times 1{,}30^n \geqslant 16000 \qquad 1{,}30^n \geqslant \dfrac{16000}{233} \qquad \ln 1{,}30^n \geqslant \ln \dfrac{16000}{233} \qquad n \ln 1{,}30 \geqslant \ln \dfrac{16000}{233}$

$n \geqslant \dfrac{\ln \dfrac{16000}{233}}{\ln 1{,}30}$ or $\dfrac{\ln \dfrac{16000}{233}}{\ln 1{,}30} \approx 16{,}12$.
d'où $n \geqslant 17$. L'année serait alors 2015+17 c'est-à-dire 2032.

EXERCICE 3 — 5 points

Deux amis ont monté un atelier associatif pour réparer des vélos. Le but de cette association est que chaque adhérent puisse venir réparer son vélo dans cet atelier avec l'aide d'un spécialiste. Le matériel et les outils sont fournis.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A : les roulements à billes

Nos deux amis commandent régulièrement des lots de 60 roulements à billes pour les vélos. Ils ont constaté que, lors de leur dernière livraison, sur le lot des 60 roulements à billes, 3 étaient défectueux. Ils s'inquiètent donc de la fiabilité du fabricant. Le contrat précise que seulement 4 % des pièces sont défectueuses.

1. Calculons la fréquence des pièces défectueuses dans le dernier lot.

   Il y a 3 pièces défectueuses sur 60. La fréquence est donc $\dfrac{3}{60} = 0{,}05$.

   Par conséquent il y a 5 % de pièces défectueuses dans le dernier lot.

On considère que les pièces constituant ce lot forment un échantillon prélevé de façon aléatoire dans un stock dans lequel 4 % des pièces sont défectueuses.

2. Déterminons l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des roulements à billes non conformes dans un échantillon de 60 roulements. Les valeurs approchées seront arrondies à 10^{-2}.

   On rappelle que l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % sur un échantillon de taille n, avec p la proportion de pièces défectueuses sur la population, est :

   $$\left[p - 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right]$$

   Nous avons $n > 30$ mais $np = 60 \times 0{,}04 = 2{,}4 \not\geqslant 5$. Les conditions usuelles de précision ne sont pas respectées.

   Cependant

   $$\left[0{,}04 - 1,96\sqrt{\dfrac{0,04 \times 0,96}{60}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\dfrac{0,04 \times 0,96}{60}}\right] = [-0{,}01\ ; 0{,}09]\,.$$

3. Nos amis n'ont pas raison de s'inquiéter. La fréquence observée 0,05 appartient à l'intervalle de fluctuation.

Partie B : les billes

Nos amis se demandent s'ils ne devraient pas plutôt commander des billes pour réparer les roulements évoqués dans la partie A.
Ils commandent une grande quantité de billes de 6 mm de diamètre.
Malheureusement, certaines présentent un défaut de diamètre. Ils s'aperçoivent qu'ils ne peuvent utiliser que les billes mesurant entre 5,9 mm et 6,1 mm.

Sur la note du fabricant est indiqué que la variable aléatoire D qui, à chaque bille, lui associe son diamètre, suit la loi normale d'espérance $\mu = 6$ mm et d'écart-type $\sigma = 0{,}05$ mm.

Calculons la probabilité $P(5,9 \leqslant D \leqslant 6,1)$.
À la calculatrice, nous obtenons à 10^{-2} près $P(5,9 \leqslant D \leqslant 6,1) \approx 0{,}95$.

Partie C : les chaînes de vélo

Un tableau est mis à disposition pour permettre aux utilisateurs de savoir quand ils doivent changer leur chaîne de vélo. Par exemple, pour une personne utilisant son vélo en ville (vitesse moyenne 16 km.h^{-1}) environ 2 heures par jour, la durée de vie moyenne de la chaîne est de 625 jours.

On admet que la durée de vie en jour, d'une chaîne de vélo pour un tel utilisateur est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. On rappelle que la probabilité que X soit inférieure ou égale à t (exprimé en jour) vaut : $P(X \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

1. La variable X suit une loi exponentielle d'espérance 625, or $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Par conséquent, $\lambda = \dfrac{1}{625} = 0{,}0016$.

2. Le graphique en ANNEXE 1 représente la fonction de densité de la loi exponentielle de paramètre

$\lambda = 0{,}0016$ (exprimé en jour^{-1}).

a. Graphiquement, la probabilité que X soit comprise entre 350 jours et 700 jours est l'aire du domaine délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $t = 350$ et $t = 700$.

b. La probabilité que X soit comprise entre 350 jours et 700 jours est $\displaystyle\int_{350}^{700} f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est la fonction densité définie par $f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

$\displaystyle\int_{350}^{700} 0{,}0016\mathrm{e}^{-0{,}0016\mathrm{t}}\mathrm{dt} = \left[-\mathrm{e}^{-0{,}0016\mathrm{t}}\right]_{350}^{700} \approx 0{,}2449 \approx 0{,}245.$

La probabilité que X soit comprise entre 350 jours et 700 jours est, à 10^{-3} près, 0,245.

3. La probabilité que X soit de moins de 550 jours est $P(X \leqslant 550)$.

$P(X \leqslant 550) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}0016\times 550} \approx 0{,}585$.

La probabilité que X soit inférieure à 550 est 0,585 à 10^{-3} près.

4. Déterminons la valeur de x pour que $P(X < x) = 0{,}8$.

Pour ce faire, résolvons $1 - \mathrm{e}^{-0{,}0016x} = 0{,}8$.

$1 - \mathrm{e}^{-0{,}0016x} = 0{,}8$ $\quad \mathrm{e}^{-0{,}0016x} = 0{,}2$ $\quad 1 = 0{,}2\mathrm{e}^{0{,}0016x}$ $\quad \mathrm{e}^{0{,}0016x} = 5$

$0{,}0016x = \ln 5$ $\quad x = \dfrac{\ln 5}{0{,}0016} = 625\ln 5$ $\quad x \approx 1\,005{,}899$

Arrondi à l'unité, $x = 1\,006$.

Ce résultat indique le nombre de jours pour lequel la probabilité de la durée de vie de la chaîne vaut 0,8.

EXERCICE 4 — 6 points

Partie A : Lecture graphique

On considère la courbe C associée à une fonction f représentée en **ANNEXE 2** avec la droite T, tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

1. Résolvons graphiquement sur l'intervalle $[-1~;~1{,}5]$ et avec la précision permise par le dessin les deux inéquations suivantes :

a. $f(x) \geqslant 1$. L'ensemble solution de cette inéquation est l'ensemble des abscisses des points pour lesquels la courbe est située au dessus de la droite d'équation $y = 1$ soit $[-1~;~\approx -0{,}8] \cup [0~;~1{,}5]$.

b. $f'(x) \geqslant 0$. L'ensemble solution de cette inéquation est l'ensemble des abscisses des points sur lesquels la fonction f est croissante soit $[\approx -0{,}5~;~1{,}5]$.

2. a. Écrivons l'équation de la tangente T à la courbe C au point de coordonnées $(0;1)$ en sachant que cette tangente passe par le point de coordonnées $(2;7)$.

Le coefficient directeur est $m = \dfrac{7-1}{2-0} = 3$. Elle passe par le point de coordonnées $(0;1)$ d'où $p = 1$.

L'équation de la tangente T est $y = 3x + 1$.

b. Le nombre dérivé $f'(0)$ étant le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe représentative de f, nous avons donc $f'(0) = 3$.

Partie B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation $f(x) = \mathrm{e}^{-2x} + 5x$.

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} + 5x = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} + \lim_{x\to+\infty} 5x = 0 + \infty = +\infty$
   On admet pour la suite que la limite de f en $-\infty$ est $+\infty$.
2. $f'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x} + 5$.
   Étudions son signe sur $\mathbb{R}$. $-2\mathrm{e}^{-2x} + 5 > 0 \iff \mathrm{e}^{-2x} < \dfrac{5}{2} \iff \mathrm{e}^{2x} > \dfrac{2}{5} \iff 2x > \ln\left(\dfrac{2}{5}\right) \iff x > \dfrac{\ln 2 - \ln 5}{2}$.
   Par conséquent si $x \in \left]-\infty\,;\, \dfrac{\ln 2 - \ln 5}{2}\right[$, $f'(x) < 0$ et si $x \in \left]\dfrac{\ln 2 - \ln 5}{2}\,;\, +\infty\right[$ $f'(x) > 0$.
3. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.
   Sur $\left]-\infty\,;\, \dfrac{\ln 2 - \ln 5}{2}\right[$, $f'(x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I.
   Sur $\left]\dfrac{\ln 2 - \ln 5}{2}\,;\, +\infty\right[$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.
   Construisons le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$. $f\left(\dfrac{\ln 2 - \ln 5}{2}\right) = \dfrac{5}{2} + \dfrac{5(\ln 2 - \ln 5)}{2} \approx 0{,}209$

x	$-\infty$		$\frac{\ln 2 - \ln 5}{2}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
Variation de f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{2} + \frac{5(\ln 2 - \ln 5)}{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

4. **a.** Déterminons à partir du tableau des variations le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$.
   Cette équation admet une solution sur chaque intervalle où la fonction est strictement monotone c'est-à-dire une appartenant à $\left]-\infty\,;\, \dfrac{\ln 2 - \ln 5}{2}\right[$ et l'autre à l'intervalle $\left]\dfrac{\ln 2 - \ln 5}{2}\,;\, +\infty\right[$
   car $2 \in \left]\frac{5}{2} + \frac{5(\ln 2 - \ln 5)}{2}\,;\, +\infty\right[$.
   b. Déterminons une valeur arrondie à 10^{-2} près de chaque solution.
   À l'aide de la table d'une calculatrice, nous trouvons à 10^{-2} près $-0{,}96$ et $0{,}29$.

Partie C. : Calcul d'aire

On admet :

- que la courbe C de la partie A est la représentation de la fonction f définie dans la partie B ;
- que la courbe C se situe « au-dessus » de la droite tangente T sur $\mathbb{R}$.

L'objectif de cette partie est de déterminer par un calcul l'aire $\mathscr{A}$ comprise entre la courbe C, la droite T et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1{,}5$.

1. l'aire $\mathscr{A}$ que l'on veut déterminer, est hachurée sur le dessin, en ANNEXE 2.
2. **a.** Déterminons une primitive G de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout réel x, $g(x) = \mathrm{e}^{-2x} + 2x - 1$.
   $G(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + x^2 - x$

b. Pour tout x appartenant à $[0\,;\,1,5]$, la courbe représentative de f étant au dessus de T, par conséquent $f(x) - (3x+1) > 0$. Or $f(x) - (3x+1) = g(x)$.

L'aire $\mathcal{A}$ recherchée vaut, en unités d'aire : $\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^{1,5} g(x)\,\mathrm{d}x$.

c. $\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^{1,5} g(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + x^2 - x\right]_0^{1.5}$

$G(1,5) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-3} + \dfrac{9}{4} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{3-2\mathrm{e}^{-3}}{4}$ $\qquad G(0) = -\dfrac{1}{2}$

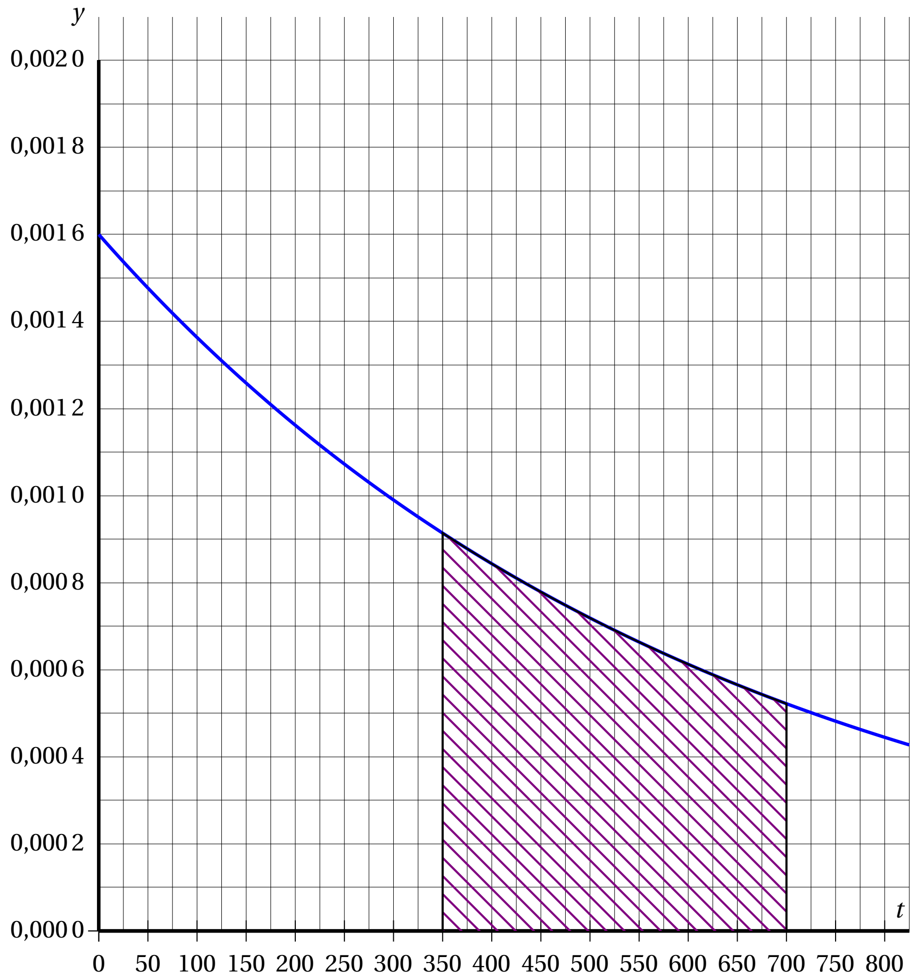
$\mathcal{A} = G(1,5) - G(0) = \dfrac{3-2\mathrm{e}^{-3}}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5-2\mathrm{e}^{-3}}{4}$

L'aire du domaine plan délimité par la courbe, la droite T et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1,5$ vaut en unités d'aire $\dfrac{5-2\mathrm{e}^{-3}}{4}$ ou en arrondissant au centième : 1,23.

ANNEXE 1
à rendre avec la copie

Exercice n° 3

Partie C : les chaînes de vélo



ANNEXE 2

à rendre avec la copie

Exercice n° 4

Parties A et C