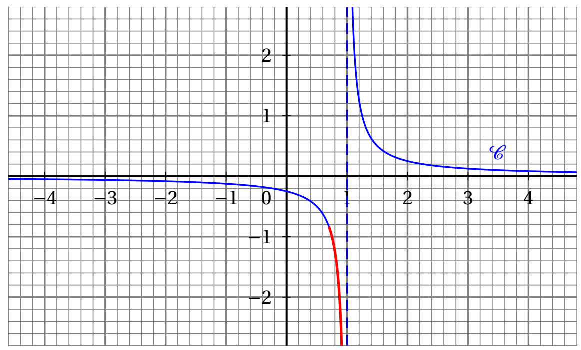
☙ Corrigé du baccalauréat STI2D et STL/SPCL ❧
Polynésie – 21 juin 2018

Exercice 1 **4 points**

Partie A

1. On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$.



a. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

b. $\boxed{\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = -\infty}$

c. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = -\infty$

d. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

> La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe.
> **Réponse b.**

2. Une solution g de l'équation différentielle $y'' + 9y = 0$ vérifiant $g(0) = 1$ est définie sur **R** par :

a. $g(t) = \cos(9t) + \sin(9t)$

b. $g(t) = 4\cos(3t) - 3$

c. $\boxed{g(t) = \cos(3t) + \sin(3t)}$

d. $g(t) = 2\cos(3t) - \sin(3t)$

> Les équations différentielles de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$ ont pour solutions les fonctions g définies par $g(t) = a \times \cos(\omega t) + b \times \sin(\omega t)$ et celle qui vérifie $g(0) = 1$ est celle définie par $g(t) = \cos(3t) + \sin(3t)$.
> **Réponse c.**

3. L'équation $\ln(x-2) = -2$ admet pour solution dans **R** :

a. 0

b. $\boxed{2 + \mathrm{e}^{-2}}$

c. 2,14

d. $2 - \mathrm{e}^{2}$

> $\ln(x-2) = -2 \iff x - 2 = \mathrm{e}^{-2} \iff x = 2 + \mathrm{e}^{-2}$
> **Réponse b.**

4. La dérivée de la fonction h définie sur **R** par $h(x) = x\mathrm{e}^{-2x}$ est la fonction h' définie sur **R** par :

a. $h'(x) = \mathrm{e}^{-2x}$

b. $h'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}$

c. $h'(x) = -2x\mathrm{e}^{-2x}$

d. $\boxed{h'(x) = (1-2x)\,\mathrm{e}^{-2x}}$

> $h'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-2x} + x \times (-2)\,\mathrm{e}^{-2x} = (1-2x)\,\mathrm{e}^{-2x}$
> **Réponse d.**

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

Soient A, B et C les points d'affixes $z_{\text{A}} = \dfrac{\sqrt{2}+\text{i}\sqrt{2}}{\text{i}}$, $z_{\text{B}} = 2\,\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$, $z_{\text{C}} = -2\,\text{i}\,\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}$.

- **Affirmation 1 :** La forme algébrique de z_{A} est $\sqrt{2}-\text{i}\sqrt{2}$.

  $\dfrac{1}{\text{i}} = -\dfrac{-\text{i}^2}{\text{i}} = -\text{i}$ donc $z_{\text{A}} = \dfrac{\sqrt{2}+\text{i}\sqrt{2}}{\text{i}} = -\text{i}\left(\sqrt{2}+\text{i}\sqrt{2}\right) = -\text{i}\sqrt{2}-\text{i}^2\sqrt{2} = \sqrt{2}-\text{i}\sqrt{2}$

  Affirmation 1 vraie

- **Affirmation 2 :** Un argument de z_{C} est $\dfrac{\pi}{6}$.

  $-\text{i} = \text{e}^{-\frac{\pi}{2}}$ donc $z_{\text{C}} = -2\,\text{i}\,\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}} = 2\,\text{e}^{-\frac{\pi}{2}}\,\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}} = 2\,\text{e}^{-\text{i}\frac{2\pi}{3}}$

  z_{C} a pour argument $-\dfrac{2\pi}{3}$.

  Affirmation 2 fausse

- **Affirmation 3 :** Les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O.

  $\text{OA} = \left|z_{\text{A}}\right| = \left|\sqrt{2}-\text{i}\sqrt{2}\right| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2+2} = 2$

  $\text{OB} = \left|z_{\text{B}}\right| = \left|2\,\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}\right| = 2$

  $\text{OC} = \left|z_{\text{C}}\right| = \left|2\,\text{e}^{-\text{i}\frac{2\pi}{3}}\right| = 2$

  Donc OA = OB = OC = 2 donc les trois points A, B et C sont sur le cercle de centre O et de rayon 2.

  Affirmation 3 vraie

- **Affirmation 4 :** O est le milieu du segment [BC].

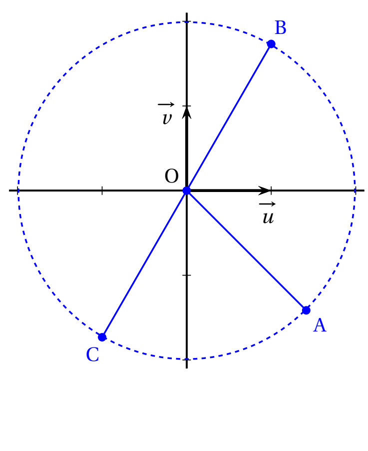
  Le point O est le milieu du segment [BC] si les nombres z_{B} et z_{C} sont opposés.

  $z_{\text{B}} = 2\,\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}} = 2\left(\dfrac{1}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1+\text{i}\sqrt{3}$

  $z_{\text{C}} = 2\,\text{e}^{\text{i}\frac{-2\pi}{3}} = 2\left(-\dfrac{1}{2}-\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1-\text{i}\sqrt{3} = -z_{\text{B}}$

  Donc O est le milieu de [BC].

  Affirmation 4 vraie



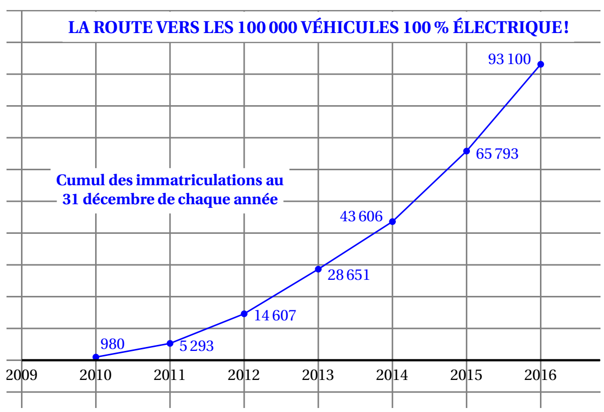
Exercice 2 **6 points**

Partie A

Dans cette partie on s'intéresse à l'évolution, depuis 2010, du nombre de véhicules « 100 % électriques » en France. Le 24 mars 2017, l'association nationale pour le développement de la mobilité électrique (Avere-France) a publié l'article suivant :

La France célèbre son 100^e^ véhicule « 100 % électrique », une première en Europe !

Jeudi 23 mars, le marché français des véhicules particuliers et utilitaires « 100 % électrique » a franchi le cap des 100 000 immatriculations cumulées depuis 2010, date de lancement de la nouvelle génération de véhicules électriques. La France devient alors le premier pays européen à atteindre un tel parc de véhicules avec zéro émission.



Dans ce contexte économique et environnemental, l'Avere-France estime qu'à l'horizon 2020, la France devrait compter plus de 350 000 véhicules « 100 % électrique » immatriculés.

D'après l'association Avere-France

La lecture du graphique précédent permet, par exemple, de dire qu'au 31 décembre 2015, il y avait en tout 65 793 véhicules « 100 % électrique » immatriculés.

1. Sur l'année 2015, il s'était vendu 65 793 véhicules électriques, et sur l'année 2016, il s'en était vendu 93 100 ; le pourcentage d'augmentation sur ces 12 mois est donc de $\dfrac{93\,100-65\,793}{65\,793}\times 100$ soit 42 % en arrondissant à l'unité.

On suppose qu'à partir de l'année 2017, l'augmentation annuelle de véhicules « 100 % électrique » immatriculés en France sera constante et égale à 40 %.
Dans le cadre de ce modèle, pour tout entier naturel n, on note u_n une estimation du nombre de véhicules « 100 % électrique » immatriculés en France au 31 décembre de l'année $2016+n$.
Ainsi on a $u_0 = 93\,100$.

2. **a.** Le nombre de véhicules « 100 % électrique » en France au 31 décembre 2017 est en augmentation de 40 % par rapport au 31 décembre 2016, ce qui fait $93\,100\times\left(1+\dfrac{40}{100}\right)=130\,340$.

b. Ajouter 40 %, c'est multiplier par $1+\dfrac{40}{100}$ soit 1,4; donc, pour tout n, $u_{n+1}=1{,}4u_n$ et donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q=1{,}4$ et de premier terme $u_0=93\,100$.
On en déduit que pour tout n, $u_n=u_0\times q^n=93\,100\times 1{,}4^n$.

c. L'année 2020 correspond à $n=4$; donc le nombre de véhicules vendus en 2020 sera, selon ce modèle, de $u_4=93\,100\times 1{,}4^4\approx 357\,653$.
Puisque la prévision était de « plus de 350 000 véhicules vendus », l'affirmation de l'association Avere-France figurant à la fin de l'article est donc validée par le modèle proposé.

3. À l'aide d'un algorithme, on souhaite estimer l'année au cours de laquelle le nombre de véhicules « 100 % électrique » immatriculés en France dépassera 1 000 000 avec ce modèle.

a. On complète l'algorithme suivant afin qu'il réponde au problème.

```
n ← 0
u ← 93100
Tant que u ⩽ 1000000
    n ← n+1
    u ← u × 1,4
Fin Tant que
```

b. Comme on cherche une année, c'est la variable n qu'il faudra afficher après l'exécution de cet algorithme.

c. À l'aide d'une calculatrice, on trouve
$u_7=93\,100\times 1{,}4^7\approx 981\,400<1\,000\,000$ et $u_8=93\,100\times 1{,}4^8\approx 1\,373\,960>1\,000\,000$.
La valeur de n affichée en fin d'algorithme est donc $n=8$.

d. Cela signifie que c'est en $2016+8=2024$ que, d'après ce modèle, le nombre de véhicules « 100 % électrique » vendus dépassera 1 000 000.

Partie B

Une usine fabrique des batteries Lithium-Ion, garanties 4 ans, nécessaires au fonctionnement des véhicules « 100 % électrique ». La durée de vie moyenne d'une telle batterie s'élève à 7 ans. On admet que la variable aléatoire T qui, à une batterie Lithium-Ion prélevée au hasard dans le stock de l'usine, associe sa durée de vie, exprimée en années, suit la loi exponentielle de paramètre λ.

1. La moyenne de vie d'une batterie est de 7 ans donc $E(T)=7$. Or on sait que si T suit une loi exponentielle de paramètre λ, on a $E(T)=\dfrac{1}{\lambda}$. On a donc $7=\dfrac{1}{\lambda}$ et donc $\lambda=\dfrac{1}{7}$.

2. Pour la suite, on prendra $\lambda=0{,}143$.

a. La probabilité qu'une batterie Lithium-Ion soit encore en état de fonctionnement au bout de 8 ans est $P(T\geqslant 8)$.
On sait que si T suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors pour tout $a\geqslant 0$,
$P(T\leqslant a)=\displaystyle\int_0^a \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=1-\mathrm{e}^{-\lambda a}$.
On en déduit que $P(T\geqslant a)=\mathrm{e}^{-\lambda a}$.
On a donc $P(T\geqslant 8)=\mathrm{e}^{-0{,}143\times 8}\approx 0{,}319$.

b. La probabilité qu'une batterie Lithium-Ion tombe en panne avant la fin de la garantie qui est de 4 ans est
$P(T\leqslant 4)=1-\mathrm{e}^{-0{,}143\times 4}\approx 0{,}436$.

c. On cherche le réel t_0 tel que $P(T>t_0)=0{,}75$.

$$P(T>t_0)=0{,}75 \iff \mathrm{e}^{-1{,}143\times t_0}=0{,}75 \iff -0{,}143\times t_0=\ln(0{,}75) \iff t_0=-\frac{\ln(0{,}75)}{0{,}143}$$

qui a pour valeur arrondie à l'unité le nombre 2.
La probabilité qu'une batterie fonctionne au moins 2 ans est 0,75.

Exercice 3 **4 points**

Une entreprise assure la maintenance d'un parc de 75 ascenseurs qui fonctionnent de façon indépendante.

Partie A

On considère dans cette partie que la probabilité qu'un ascenseur du parc tombe en panne un jour donné est 0,08. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre d'ascenseurs qui tombent en panne un jour donné.

1. **a.** Il n'y a que 2 possibilités pour chaque ascenseur ; il fonctionne ou il est en panne. De plus, les 75 ascenseurs fonctionnent de façon indépendante. On peut donc dire que la variable aléatoire X qui donne le nombre d'ascenseurs en panne suit la loi binomiale de paramètres $n = 75$ et $p = 0,08$.

   b. La probabilité que 5 ascenseurs tombent en panne un jour donné est

   $P(X=5) = \begin{pmatrix} 5 \\ 75 \end{pmatrix} 0,08^5 \times (1-0,08)^{(75-5)} \approx 0,165.$

   c. La probabilité qu'au moins 5 ascenseurs tombent en panne un jour donné est

   $P(X \geqslant 5) \approx 0,726$ (à la calculatrice).

   d. L'espérance mathématique d'une loi binomiale de paramètres n et p est np ; donc l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $75 \times 0,08 = 6$.

2. On appelle Y la variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 6$ et d'écart-type $\sigma = 2,349$. On décide d'approcher la loi de X par la loi de Y.

   Remarque – Il est légitime de prendre ces paramètres pour la loi normale suivie par Y : l'espérance mathématique de X donnera la moyenne de Y, et on prendra pour écart-type le nombre $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{75 \times 0,08 \times 0,92} \approx 2,349$.

   a. La probabilité que entre 5 et 10 ascenseurs tombent en panne un jour donné est $P(5 \leqslant X \leqslant 10)$ que l'on calcule par $P(5 \leqslant Y \leqslant 10)$ c'est-à-dire 0,621 à 10^{-3} près.

   b. La probabilité que plus de 10 ascenseurs tombent en panne un jour donné est $P(X > 10)$ c'est-à-dire $P(Y \geqslant 10)$ soit 0,044 à 10^{-3} près.

   Remarque – En général, on pratique la « correction de continuité » quand on approche une loi binomiale par une loi normale mais ce n'est pas un attendu du programme dans les séries STI2D et STL/SPCL.

Partie B

Depuis quelques temps, l'entreprise constate de nombreuses pannes parmi les 75 ascenseurs.
Ainsi, sur une période de 30 jours, il a été relevé 263 pannes en tout.
Il y a 75 ascenseurs que l'on examine sur 30 jours, ce qui revient à un parc de $30 \times 75 = 2250$ ascenseurs.
On fait l'hypothèse que la probabilité qu'un ascenseur tombe en panne un jour donné est $p = 0,08$, et on va tester cette hypothèse sur un échantillon de $n = 2250$ ascenseurs.
$n = 2250 \geqslant 30$, $np = 2250 \times 0,08 = 180 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 2250 \times 0,92 = 2070 \geqslant 5$ donc les conditions sont remplies pour que l'on établisse un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion d'ascenseurs en panne :

$$I = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,08 - 1,96\sqrt{\frac{0,08 \times 0,92}{2250}}\,; 0,08 + 1,96\sqrt{\frac{0,08 \times 0,92}{2250}}\right]$$

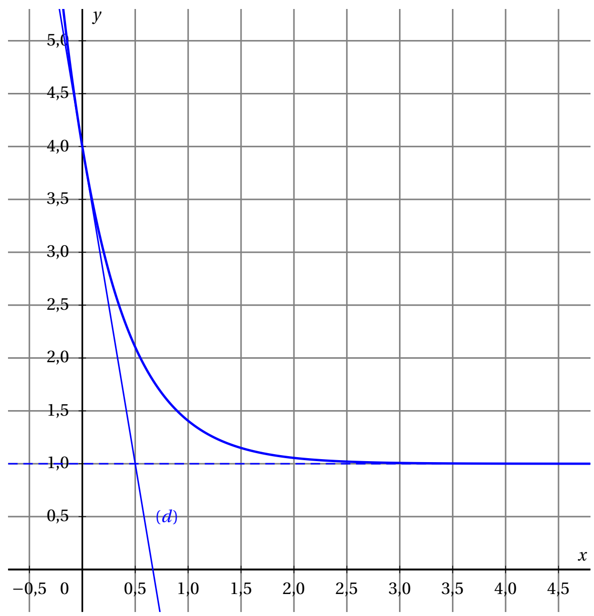
$$\approx [0,068\,; 0,092]$$

La fréquence d'ascenseurs en panne dans l'échantillon est $f = \dfrac{263}{2250} \approx 0{,}117$.
$f \notin I$ donc l'entreprise doit remettre en cause, au seuil de 95 %, le modèle selon lequel la probabilité qu'un ascenseur tombe en panne un jour donné est 0,08.

Exercice 4 — 6 points

Partie A

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbf{R}$.
La droite (d) est tangente à cette courbe au point d'abscisse 0.



Par lecture graphique :

1. $f(0) = 4$
2. La limite de f en $+\infty$ est égale à 1.
3. Le tableau de variation de f est

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1

4. Le coefficient directeur de la tangente (d) à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est $-\dfrac{3}{0{,}5} = -6$.

Partie B

On considère l'équation différentielle $y' + 2y = 2$ dans laquelle y est une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur $\mathbf{R}$.
On admet que la fonction représentée dans la **partie A** est la solution de cette équation différentielle vérifiant $f(0) = 4$.

1.
- Les solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ sont les fonctions $x \longmapsto k\,\text{e}^{-2x}$ où k est un réel quelconque.
- Une solution particulière de l'équation $y' + 2y = 2$ est la fonction $x \longmapsto 1$.
- On en déduit que les solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = 2$ sont les fonctions $x \longmapsto k\,\text{e}^{-2x} + 1$.
- La solution f vérifiant $f(0) = 4$ est telle que $k\,\text{e}^{0} + 1 = 4$ ce qui entraîne $k = 3$.

La solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 2$ vérifiant $f(0) = 4$ est donc la fonction f définie par $f(x) = 3\,\text{e}^{-2x} + 1$.

2.
- On cherche $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

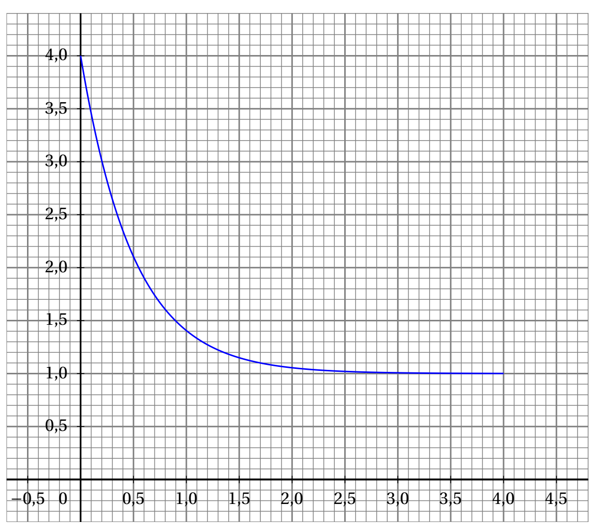
$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x \to +\infty} -2x = -\infty \\ \text{On pose } X = -2x \\ \displaystyle\lim_{X \to -\infty} \text{e}^{X} = 0\end{array}\right\}\ \text{donc } \lim_{x \to +\infty} \text{e}^{-2x} = 0 \text{ et donc } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

- Tableau de variations de f.
  - On a vu que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$.
  - $$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x \to -\infty} -2x = +\infty \\ \text{On pose } X = -2x \\ \displaystyle\lim_{X \to +\infty} \text{e}^{X} = +\infty\end{array}\right\}\ \text{donc } \lim_{x \to -\infty} \text{e}^{-2x} = +\infty \text{ et donc } \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$
  - $f'(x) = 3 \times (-2)\,\text{e}^{-2x} = -6\,\text{e}^{-2x}$ et $f'(x) < 0$ sur $\mathbf{R}$; donc la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbf{R}$.

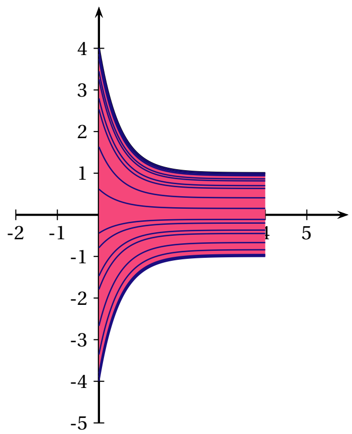
  Le tableau de variations de f est donc justifié.
- On cherche le coefficient directeur de la tangente à la courbe en 0.
  Il est égal à $f'(0) = -6\,\text{e}^{0} = -6$.

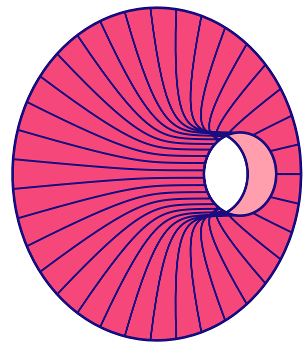
Partie C

L'unité graphique est le dm (décimètre).
On a représenté graphiquement ci-dessous la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$.
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe obtenue.



On fait tourner la courbe $\mathscr{C}$ autour de l'axe des abscisses. On génère ainsi une surface dans l'espace ayant la forme d'un vase représenté ci-après en coupe et en perspective.





Le volume de ce vase, en dm^3, est donné par : $V = \pi \times \displaystyle\int_0^4 \left(f(x)\right)^2\,\mathrm{d}x$.

1. $\left(f(x)\right)^2 = \left(3\,\mathrm{e}^{-2x}+1\right)^2 = 9\left(\mathrm{e}^{-2x}\right)^2 + 2\times 3\,\mathrm{e}^{-2x}\times 1 + 1^2 = 9\,\mathrm{e}^{-4x} + 6\,\mathrm{e}^{-2x} + 1$
2. Le volume du vase en dm^3 est
   $V = \pi \times \displaystyle\int_0^4 \left(f(x)\right)^2\,\mathrm{d}x = \pi \times \displaystyle\int_0^4 \left(9\,\mathrm{e}^{-4x} + 6\,\mathrm{e}^{-2x} + 1\right)\mathrm{d}x$.

   Pour a réel non nul, la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}$ a pour primitive la fonction $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{a}$ donc la fonction $x \longmapsto 9\,\mathrm{e}^{-4x} + 6\,\mathrm{e}^{-2x} + 1$ a pour primitive la fonction $x \longmapsto 9\dfrac{\mathrm{e}^{-4x}}{-4} + 6\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2} + x$ c'est-à-dire $x \longmapsto -\dfrac{9}{4}\mathrm{e}^{-4x} - 3\,\mathrm{e}^{-2x} + x$.

   Donc $V = \pi \times \left[-\dfrac{9}{4}\mathrm{e}^{-4x} - 3\,\mathrm{e}^{-2x} + x\right]_0^4 = \pi \times \left[\left(-\dfrac{9}{4}\mathrm{e}^{-16} - 3\,\mathrm{e}^{-8} + 4\right) - \left(-\dfrac{9}{4}\mathrm{e}^{0} - 3\,\mathrm{e}^{0} + 0\right)\right]$

   $= \pi \times \left(-\dfrac{9}{4}\mathrm{e}^{-16} - 3\,\mathrm{e}^{-8} + \dfrac{37}{4}\right)$

   dont une valeur approchée à 10^{-2} près est 29,06.
   Le volume est donc d'environ 29,06 dm^3.
3. On désire remplir ce vase aux deux tiers du volume avec du sable coloré qui est vendu par sac de 3 dm^3.
   Il faudra donc $\dfrac{2}{3}V \approx 19{,}4$ dm^3 de sable ; le sable est vendu par sac de 3 dm^3. Il faudra donc acheter 7 sacs de sable pour remplir le volume aux deux tiers.