Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI2D et STL/SPCL Polynésie 19 juin 2019

Exercice 1 **5 points**

Partie A

1.
   - $u_1 = 0{,}99u_0 + \dfrac{0}{100} = 0{,}99 \times 20 = 19{,}8$;
   - $u_2 = 0{,}99u_1 + \dfrac{0}{100} = 0{,}99 \times 19{,}8 = 19{,}602$
2. On a quel que soit n, $u_{n+1} = 0{,}99u_n$: cette relation montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,99 de premier terme $u_0 = 20$.
3. On sait que pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times 0{,}99^n$ ou encore $u_n = 20 \times 0{,}99^n$.
4. Comme $0 \leqslant 0{,}99 < 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0{,}99^n = 0$ et par conséquent $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$: la température de la pièce va se rapprocher de la température extérieure.
5. **a.** On résout $u_n < 5$ ou $20 \times 0{,}99^n < 5$ ou $0{,}99^n < \dfrac{5}{20}$, soit $0{,}99^n < \dfrac{1}{4}$ ou $0{,}99^n < 0{,}25$.
   Par croissance de la fonction logarithme népérien il en résulte que :
   $n \ln 0{,}99 < \ln 0{,}25$ et enfin $n > \dfrac{\ln 0{,}25}{\ln 0{,}99}$ (car $\ln 0{,}99 < 0$).
   Or $\dfrac{\ln 0{,}25}{\ln 0{,}99} \approx 137{,}9$.

   b. D'après le résultat précédent la température intérieure est descendue en dessous de 5 °C après 140 h, soit comme $140 = 24\times5+20$ après 5 jours et 20 h, soit en arrondissant en jours : 5 jours.

Partie B

1. Avec $T = -15$ la relation de récurrence devient :

$$u_{n+1} = 0{,}99u_n + \frac{-15}{100} = 0{,}99u_n - 0{,}15 \quad \text{et} \quad u_0 = 20.$$

2. **a.**
   - $u_1 = 0{,}99 \times u_0 - 0{,}15 = 0{,}99 \times 20 - 0{,}15 = 19{,}8 - 0{,}15 = 19{,}65$.
   - $u_2 = 0{,}99 \times u_1 - 0{,}15 = 0{,}99 \times 19{,}65 - 0{,}15 = 19{,}4535 - 0{,}15 = 19{,}3035$.

   b. On a $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{19{,}65}{20} = 0{,}9825$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{19{,}3035}{19{,}65} \approx 0{,}9824$: donc il n'existe pas de réel q tel que $u_{n+1} = qu_n$: la suite (u_n) n'est pas géométrique.
3.

   a.

$U \leftarrow 20$
$N \leftarrow 0$
Tant que $U > 5$
$\quad U \leftarrow 0{,}99 \times U - 0{,}15$
$\quad N \leftarrow N + 1$
Fin Tant que

b. La calculatrice donne $N = 56$ heures.

Exercice 2 6 points

Les parties A *et* B *de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.*

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,4[$ par :

$$f(x) = 10x + \ln(4 - x) - \ln 4.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. $f(0) = 10 \times 0 + \ln(4 - 0) - \ln 4 = 0$.
2. **a.** On a $\lim\limits_{x \to 4} 10x - \ln 4 = 40 - \ln 4$ et $\lim\limits_{x \to 4} \ln(4 - x) = -\infty$, d'où par somme de limites $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = -\infty$.

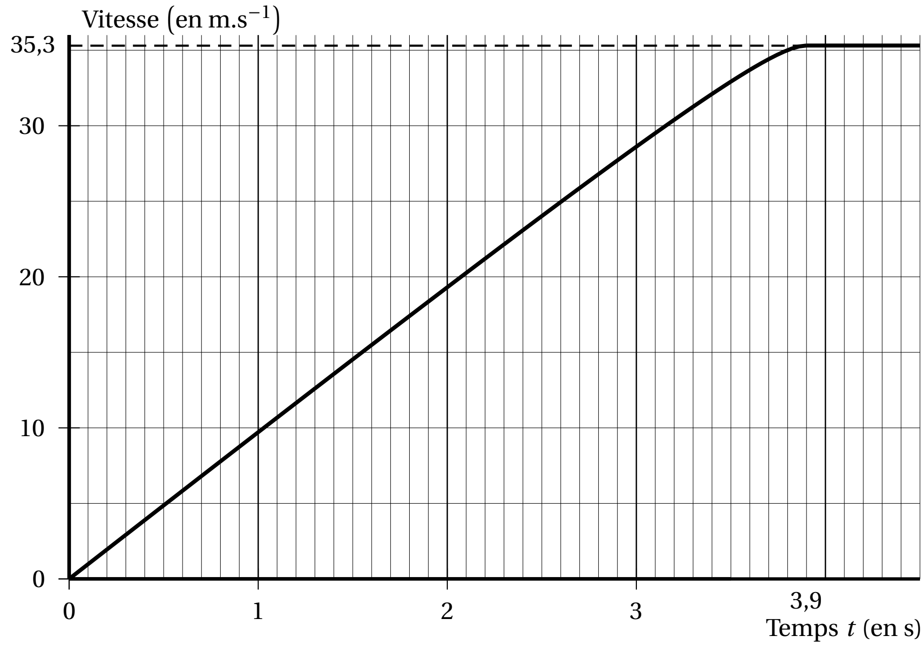
   b. Le résultat précédent signifie géométriquement que la droite d'équation $x = 4$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.
3. **a.** f est dérivable sur $[0\,;\,4[$ et sur cet intervalle $f'(x) = 10 + \dfrac{1}{x-4} = \dfrac{10(x-4)+1}{x-4} = \dfrac{10x-40+1}{x-4} = \dfrac{10x-39}{x-4}$.

   b. De $0 \leqslant x \leqslant 4$, on déduit $-4 \leqslant x - 4 \leqslant 0$.
   $10x - 39 = 0$ si $10x = 39$ ou $x = \dfrac{39}{10} = 3{,}9$.
   $10x - 39 \geqslant 0$ si $10x \geqslant 39$ ou $x \geqslant \dfrac{39}{10} = 3{,}9$.
   $10x - 39 \leqslant 0$ si $10x \leqslant 39$ ou $x \leqslant \dfrac{39}{10} = 3{,}9$.
   On en déduit par tableau de signes le signe de $f'(x)$:

x	0		3,9		4
$x-4$		$-$		$-$	
$10x-39$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

   c. Du tableau précédent on en déduit que f est strictement croissante sur $[0\,;\,3{,}9]$, puis strictement décroissante sur $[3{,}9\,;\,4]$: f admet donc sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ un maximum
   $f(3{,}9) = 10 \times 3{,}9 + \ln(4 - 3{,}9) - \ln 4 \approx 35{,}31$, soit 35,3 au dixième près.

Partie B



1. **a.** $f(3) = 10 \times 3 + \ln(4-3) - \ln 4 = 30 + 0 - \ln 4 \approx 28{,}6137$ mètres par seconde soit $60 \times (30 - \ln 4) \approx 1716{,}82$ mètres par minute ou encore $60 \times 60(30 - \ln 4) \approx 103\,009$ mètres par heure ou 103,009 km par heure.

   b. L'affirmation du constructeur est vérifiée.

2. **a.** Sur l'intervalle $[0\,;\,3{,}9]$, F est dérivable et sur cet intervalle :
   $F'(t) = 2 \times 5t - 1 + \ln(4-t) - \ln 4 + (t-4) \times (-1)\dfrac{1}{4-t} = 10t - 1 + \ln(4-t) - \ln 4 + 1 =$
   $10t + \ln(4-t) - \ln 4 = f(t)$.
   Cette égalité montre bien que F est une primitive de f sur l'intervalle $[0\,;\,3{,}9]$.

   b. On a donc $D = [F(t)]_0^{3{,}9} = F(3{,}9) - F(0) =$
   $5 \times 3{,}9^2 - 3{,}9 + (3{,}9 - 4)[\ln(4 - 3{,}9) - \ln 4] - \left(5 \times 0^2 - 0 + (0-4)[\ln(4-0) - \ln 4]\right) =$
   $76{,}05 - 3{,}9 - 0{,}1\,[\ln 0{,}1 - \ln 4] + 4(\ln 4 - \ln 4) =$
   $76{,}05 - 3{,}9 - 0{,}1\,[\ln 0{,}1 - \ln 4] \approx 72{,}52$ soit 72,5 au dixième près.

Exercice 3 **5 points**

Les parties A *et* B *peuvent être traitées de manière indépendante.*

Partie A : Effet du filtre sur un son grave

1. $z_C = -\dfrac{1000\sqrt{3}}{100}\mathrm{i} = -10\sqrt{3}\mathrm{i}$.

2. **a.** Avec $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ et $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, on a
   $z_C = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \times 10\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 10\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$.

   b. On considère le nombre complexe $Z = z_R + z_C$. On a donc $Z = 10 - 10\sqrt{3}\mathrm{i}$.
   $|Z|^2 = 10^2 + \left(-10\sqrt{3}\right)^2 = 100 + 300 = 400 = 20^2$, d'où $|Z| = 20$.
   Donc $Z = 20\left(\dfrac{10}{20} - \mathrm{i}\dfrac{10}{20}\sqrt{3}\right) = 20\left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 20\left(\cos -\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin -\frac{\pi}{3}\right) = 20\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

c. $z_G = \dfrac{z_C}{z_R + z_C} = \dfrac{10\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}}{20\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{9\pi}{6}+\frac{2\pi}{6}\right)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

d. On a $|z_G| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Une valeur approchée de ce gain est 0,866 025, soit 0,87 au centième près.

Partie B : Effet du filtre sur un son aigu

1. $z_C = -\dfrac{1\,000\sqrt{3}}{1\,000\sqrt{3}}\mathrm{i} = -\mathrm{i}$

   $z_G = \dfrac{z_C}{z_R + z_C} = \dfrac{-\mathrm{i}}{10-\mathrm{i}}$.
2. $z_G = \dfrac{-\mathrm{i}}{10-\mathrm{i}} = \dfrac{-\mathrm{i}(10+\mathrm{i})}{(10-\mathrm{i})(10+\mathrm{i}} = \dfrac{1-10\mathrm{i}}{100+1} = \dfrac{1}{101} - \mathrm{i}\dfrac{10}{101}$.
3. On a $|z_G|^2 = \left(\dfrac{1}{101}\right)^2 + \left(\dfrac{10}{101}\right)^2 = \dfrac{101}{101^2} = \dfrac{1}{101}$.

   Donc le gain du filtre est égale à :

   $|z_G| = \sqrt{\dfrac{1}{101}} = \dfrac{1}{\sqrt{101}} \approx 0{,}099\,5$ soit environ 0,10 au centième.

Exercice 4 **4 points**

1. On a $\mathrm{E}(X) = 10\,000 = \dfrac{1}{\lambda}$, λ étant le paramètre de la loi exponentielle, donc $\lambda = \dfrac{1}{10\,000} = 10^{-4} = 0{,}000\,1$.

   On sait que $P(X \geqslant 730) = \mathrm{e}^{-\lambda\times 730} = \mathrm{e}^{-0{,}073}$.

   C'est donc exactement le contraire de ce qui est affirmé : l'affirmation 1 est fausse.

2. On a $P(T < 60) = P(T \leqslant 50) + P(50 < T < 60) \approx 0{,}5 + 0{,}423$, soit 0,923 au millième près.

   L'affirmation 2 est vraie.

3. Avec $p = 0{,}97$ et $n = 200$, les conditions :

   $n \geqslant 30$, $np = 200 \times 0{,}97 = 194 \geqslant 30$, $n(1-p) = 200 \times 0{,}03 = 60 \geqslant 30$ sont vérifiées.

   L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de téléphones réparables en moins d'une heure est

   $\left[p - 1{,}96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1{,}96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[p - 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}97\times 0{,}03)}{200}}\ ;\ p + 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}97\times 0{,}03}{200}}\right]$

   $\approx [0{,}946\ ;\ 0{,}994]$.

   L'affirmation 3 est vraie.

4. Y suivant la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}000\,1$, on sait que :

   $$P(Y=0) = 0{,}000\,1^0 \times (1 - 0{,}000\,1)^{200} = (1 - 0{,}000\,1)^{200} = 0{,}999\,9^{200}$$

   Or $0{,}999\,9^{200} \approx 0{,}980\,2$ soit 0,980 au millième près.

   L'affirmation 4 est vraie.