Corrigé du baccalauréat STI2D et STL spécialité SPCL
Polynésie – 14 juin 2017

EXERCICE 1 (4 points)

1. La forme exponentielle du nombre complexe $z = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ est :

A. $-2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$	**B.** $2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$
C. $\mathrm{i}\sqrt{3} - 1$	**D.** $\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

Réponse B.

$$[z[= \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \text{ donc } z = 2\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ donc } z = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$$

2. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{\ln 2} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ est égale à :

A. $\ln 2 - 1$	**B.** $\dfrac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}$
C. $\dfrac{2-\mathrm{e}}{2\,\mathrm{e}}$	**D.** $1 - \ln 2$

Réponse C.

$$\int_1^{\ln 2} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_1^{\ln 2} = -\mathrm{e}^{-\ln 2} - \left(-\mathrm{e}^{-1}\right) = -\frac{1}{\mathrm{e}^{\ln 2}} + \frac{1}{\mathrm{e}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\mathrm{e}} = \frac{2-\mathrm{e}}{2\,\mathrm{e}}$$

3. Si f est la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 2x - \ln x$, alors :

A. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$	**B.** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$
C. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$	**D.** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ln 2$

Réponse A.

$$\lim_{x\to 0^+} 2x = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \text{ donc par soustraction } \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

4. Soit G la fonction définie pour tout réel x strictement positif par $G(x) = x\ln x - x + 2$.
G est une primitive de la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

A. $g(x) = x\ln x - 1$	**B.** $g(x) = \ln x + 2x$
A. $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + 2x$	**D.** $g(x) = \ln x$

Réponse D.

$$G'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 + 0 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

EXERCICE 2 (4 points)

En 2016, l'Organisation Mondiale de la Santé (OMS) affirme que 5,1 millions de personnes en France souffraient de diabète, soit 8 % de la population.
Chaque personne dispose d'un dossier médical régulièrement actualisé.

Partie A

Dans le cadre de la semaine nationale de prévention du diabète qui s'est tenue en 2016, une campagne de sensibilisation de cette maladie a été menée.
Sur 85 dossiers médicaux prélevés au hasard, on a compté 3 cas de diabète.

1. La fréquence de cas de diabète dans l'échantillon prélevé est $f = \dfrac{3}{85} \approx 0{,}035$.
2. D'après le texte, la proportion de personnes atteintes du diabète dans la population totale est $p = 0{,}08$.
   Pour un échantillon de taille $n = 85$: $85 \geqslant 30$, $np = 85 \times 0{,}08 = 6{,}8 \geqslant 5$ et $n\left(1-p\right) = 85 \times 0{,}92 = 78{,}2 \geqslant 5$ donc les conditions sont vérifiées pour qu'on puisse établir un intervalle de fluctuation avec un niveau de confiance de 95 % :
   $$I = \left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$
   $$= \left[0{,}08 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}08(1-0{,}08)}{85}}\ ;\ 0{,}08 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}08(1-0{,}08)}{85}}\right] \approx [0{,}022\ ;\ 0{,}138]$$
3. $f \approx 0{,}035 \in I$ donc on peut considérer que l'échantillon est représentatif de la population.

Partie B

Dans le corps humain, la régulation du taux de glycémie est assurée grâce à un équilibre permanent entre différentes substances principalement hormonales.
Le tableau suivant présente trois états de la glycémie :

Hypoglycémie	À jeun : inférieur à 0,70 g/l
Glycémie normale	À jeun : entre 0,70 g/l et 1,10 g/l
Hyperglycémie	À jeun : supérieur à 1,10 g/l

On note N la variable aléatoire qui, à chaque dossier médical prélevé au hasard dans la population, associe le taux de glycémie à jeun en g/l de la personne. On suppose que N suit la loi normale de moyenne 0,9 et d'écart type 0,1.

Dans le cadre de cet exercice, on considère qu'une personne souffre de diabète si cette personne ne présente pas une glycémie normale à jeun.

1. La probabilité pour que le dossier prélevé soit celui d'une personne en hypoglycémie est :
   $P(N < 0{,}7) \approx 0{,}023$ (à la calculatrice).
2. La probabilité pour que le dossier prélevé soit celui d'une personne en hyperglycémie est :
   $P(N > 1{,}1) \approx 0{,}023$ (à la calculatrice).
3. Une personne est malade du diabète si elle est en hypoglycémie ou en hyperglycémie donc la probabilité que le dossier prélevé soit celui d'une personne souffrant de diabète est :
   $P(N < 0{,}7 \text{ ou } N > 1{,}1) = P(N < 0{,}7) + P(N > 1{,}1) \approx 0{,}046$.

EXERCICE 3 (6 points)

Une note de musique est émise en pinçant la corde d'une guitare électrique.
La puissance du son émis, initialement de 100 watts, diminue avec le temps t, mesuré en seconde.
On modélise par $f(t)$ la puissance du son émis, exprimée en watt, t secondes après le pincement de la corde.

Partie A

On considère l'équation différentielle (E) : $25y' + 3y = 0$.

1. L'équation différentielle $25y' + 3y = 0$ est équivalente à $y' + \dfrac{3}{25}y = 0$ ou encore $y' + 0{,}12y = 0$, qui est de la forme $y' + ay = 0$ avec $a \neq 0$. D'après le cours, les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions f définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = C\,\mathrm{e}^{-at}$ où C est un réel quelconque.
   L'équation différentielle $25y' + 3y = 0$ a donc pour solutions les fonctions f définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = C\,\mathrm{e}^{-0{,}12t}$ où C est un réel quelconque.
2. Si la solution vérifie la condition initiale $f(0) = 100$, on aura : $C\,\mathrm{e}^{0} = 100 \iff C = 100$.
   La solution est donc la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = 100\,\mathrm{e}^{-0{,}12t}$.
3. La puissance du son 2 secondes après le pincement de la corde est $f(2) = 100\,\mathrm{e}^{-0{,}12\times 2} \approx 79$ watts.

Partie B

On s'intéresse à l'instant à partir duquel la puissance du son émis après le pincement de la corde sera inférieure à 80 watts.
On considère l'algorithme suivant :

```
Initialisation
a prend la valeur 0
b prend la valeur 5
Traitement
Tant que |b − a| > 0,2
    m prend la valeur (a+b)/2
        Si f(m) > 80
            a prend la valeur m
        Sinon
            b prend la valeur m
        Finsi
Fintantque
Sortie
Afficher a, b
```

1. À l'aide de l'algorithme ci-dessus, on complète le tableau donné en annexe :

a	0	0	1,25	1,25	1,5625	1,71875
b	5	2,5	2,5	1,875	1,875	1,875
$b-a$	5	2,5	1,25	0,625	0,3125	0,15625
$\lvert b-a\rvert > 0{,}2$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	**Faux**
m	2,5	1,25	1,875	1,5625	1,71875	
$f(m) \approx$	74,1	86,1	79,9	82,9	81,4	
$f(m) > 80$	Faux	Vrai	Faux	Vrai	Vrai	

2. Les valeurs affichées en sortie de cet algorithme sont alors 1,71875 pour a, et 1,875 pour b.
3. Cela signifie qu'à partir d'un temps t compris entre 1,71875 et 1,875 seconde, la puissance du son émis sera inférieure à 80 watts.

Partie C

1. On résout l'équation $f(t) = 80$:

   $f(t) = 80 \iff 100\,\text{e}^{-0,12t} = 80 \iff \text{e}^{-0,12t} = 0,8 \iff -0,12t = \ln(0,8) \iff t = -\dfrac{\ln(0,8)}{0,12}$

   donc $t \approx 1,860$.

   Cela signifie qu'au bout de 1,860 seconde, la puissance du son émis est descendue à 80 watts.

2. On calcule la limite de f lorsque t tend vers $+\infty$:

   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to+\infty} -0,12t = -\infty\\ \text{On pose } T = -0,12t\\ \lim\limits_{T\to-\infty} \text{e}^{T} = 0\end{array}\right\}\ \text{donc } \lim_{t\to+\infty} \text{e}^{-0,12t} = 0 \text{ donc } \lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$$

   Cela veut dire que si le temps augmente, la puissance du son va tendre vers 0 watt.

EXERCICE 4 **(6 points)**

Dans un parc régional, on étudie une espèce de renards. Cette population était de 1 240 renards à la fin de l'année 2016. On modélise par u_n le nombre de renards dans le parc régional à la fin de l'année $2016+n$. On a donc $u_0 = 1240$. On estime à 15 % par an la baisse du nombre u_n. On suppose que cette évolution restera identique pour les années à venir.

Partie A

1. Pour avoir la population à la fin de l'année 2017 on retire 15 % à l'effectif de 2016 ; retirer 15 %, c'est multiplier par 0,85 donc $1240 \times 0,85 = 1054$.

   À la fin de l'année 2017, la population de renards sera de 1 054.

2.
   a. u_1 est la population en $2016+1 = 2017$ donc $u_1 = 1054$.

      $u_2 = 0,85 \times u_1 = 0,85 \times 1054 \approx 896$.

   b. On retire 15 % chaque année donc on multiplie par 0,85 : $u_{n+1} = 0,85 \times u_n$

   c. La suite (u_n) est donc géométrique de premier terme $u_0 = 1240$ et de raison $q = 0,85$.

3. La fin de l'année 2020 correspond à $n = 4$:

   $u_2 \approx 896$; $u_3 = 0,85 \times 896 \approx 762$ et $u_4 = 0,85 \times 762 \approx 648$

   On peut estimer à 648 la population de renards fin 2020.

4. La suite (u_n) est géométrique de raison 0,85 et $-1 < 0,85 < 1$, donc la suite (u_n) a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$. Cela signifie que la population des renards va s'éteindre.

5. Des scientifiques considèrent que l'espèce des renards présents dans le parc sera en situation d'extinction à partir du moment où le nombre de renards deviendra strictement inférieur à 100.

   La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 1240$ et de raison $q = 0,85$ donc, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = 1240 \times 0,85^n$.

   On résout l'inéquation $u_n < 100$:

   $$u_n < 100 \iff 1240 \times 0,85^n < 100 \iff 0,85^n < \frac{100}{1240} \iff \ln\left(0,85^n\right) < \ln\frac{100}{1240}$$

   $$\iff n \times \ln(0,85) < \ln\frac{100}{1240} \iff n > \frac{\ln\frac{100}{1240}}{\ln(0,85)}$$

   Or $\dfrac{\ln\frac{100}{1240}}{\ln(0,85)} \approx 15,5$ donc le nombre de renards deviendra inférieur à 100 à la fin de la 16[e] année, soit fin 2032.

Partie B

Afin de préserver l'espèce, on décide d'introduire à chaque année 30 renards à partir de la fin de l'année 2017. On note v_n le nombre de renards présents dans le parc à la fin de l'année $2016 + n$. On estime à 15 % par an la baisse du nombre v_n. On a $v_0 = 1\,240$.

1. $v_1 = 0{,}85 v_0 + 30 = 0{,}85 \times 1\,240 + 30 = 1084$.

2. On admet que, pour tout entier naturel n, on a $v_n = 200 + 1\,040 \times 0{,}85^n$.

- $0{,}85 < 1$ donc, pour tout n, $0{,}85 \times 0{,}85^n < 1 \times 0{,}85^n$, ce qui équivaut à $0{,}85^{n+1} < 0{,}85^n$.
  On en déduit que $1\,040 \times 0{,}85^{n+1} < 1\,040 \times 0{,}85^n$
  puis que $200 + 1\,040 \times 0{,}85^{n+1} < 200 + 1\,040 \times 0{,}85^n$, ce qui signifie que $v_{n+1} < v_n$.
  La suite (v_n) est donc décroissante, ce qui justifie que « le nombre de renards va diminuer ».
- La suite $(0{,}85^n)$ est géométrique de raison 0,85 donc elle a pour limite 0; la limite de la suite (v_n) est donc 200.
  Cela justifie que le nombre de renards va « se stabiliser vers 200 ».

On peut donc affirmer que : « Le nombre de renards va diminuer et se stabiliser vers 200 ».