Corrigé du Baccalauréat STI2D – spécialité

Polynésie 4 mai 2022

Physique-Chimie et Mathématiques

EXERCICE 3 commun à tous les candidats (mathématiques) **4 points**

Question 1

Une entreprise réalise des bouchons par injection plastique. On modélise la température (en degré Celsius) d'un bouchon plastique à l'issue de sa fabrication, en fonction du temps t (en seconde) par l'équation différentielle :

$$y' = -0,1y + 7.$$

On veut montrer que la fonction θ définie par $\theta(t) = 80\,\text{e}^{-0,1t} + 70$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ est solution de cette équation différentielle et qu'elle vérifie la condition initiale $\theta(0) = 150$.

- $\theta(t) = 80\,\text{e}^{-0,1t} + 70$ donc $\theta'(t) = 80 \times (-0,1)\,\text{e}^{-0,1t} = -8\,\text{e}^{-0,1t}$
  Or $-0,1\theta(t) + 7 = -0,1\left(80\,\text{e}^{-0,1t} + 70\right) + 7 = -8\,\text{e}^{-0,1t} - 7 + 7 = -8\,\text{e}^{-0,1t} = \theta'(t)$
  Donc la fonction θ est solution de l'équation différentielle $y' = -0,1y + 7$.
- $\theta(0) = 80\,\text{e}^{0} + 70 = 80 + 70 = 150$

On peut donc dire que la fonction θ est solution de cette équation différentielle et qu'elle vérifie la condition initiale $\theta(0) = 150$.

Question 2

Soit le nombre complexe $z = -1 + \text{i}$.

a.
- $|z| = |-1 + \text{i}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- Donc $z = \sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \text{i}\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

  Le nombre z a pour argument le réel θ tel que $\cos(\theta) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; donc on peut prendre $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$.

L'écriture exponentielle de z est donc $\sqrt{2}\,\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$.

b. $z^4 = \left(\sqrt{2}\,\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 \times \text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}\times 4} = 4 \times \text{e}^{3\pi} = 4 \times (-1) = -4$

Donc la partie imaginaire de z^4 est 0.

Question 3

Une voiture électrique, dont l'accumulateur est totalement déchargé, est branchée à une borne de rechargement. L'énergie emmagasinée par l'accumulateur (en kilowattheure), notée E, peut être modélisée en fonction du temps t écoulé (en heure) par la fonction E définie pour $t \in [0\,;\,+\infty[$ par :

$$E(t) = 18\left(1 - \mathrm{e}^{-0,45t}\right).$$

On admet que cette voiture a une énergie de stockage limitée à 18 kWh.
On veut déterminer l'instant t_0, arrondi à la minute, à partir duquel la moitié de cette énergie de stockage limite a été emmagasinée, c'est-à-dire tel que $E(t_0) = 9$.
On résout cette équation.

$E(t_0) = 9 \iff 18\left(1 - \mathrm{e}^{-0,45t_0}\right) = 9 \iff 1 - \mathrm{e}^{-0,45t_0} = 0,5 \iff 0,5 = \mathrm{e}^{-0,45t_0}$

$\iff \ln(0,5) = -0,45t_0 \iff -\dfrac{\ln(0,5)}{0,45} = t_0$

Donc $t_0 \approx 1,54$; or $\dfrac{54}{100} = \dfrac{32,4}{60}$ donc le temps cherché est d'environ 1 heure 32 minutes.

Question 4

On considère une fonction f dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ dont la fonction dérivée f' est, donnée, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, par $f'(x) = \dfrac{-3x+2}{x}$.
On étudie le sens de variation de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$ en étudiant le signe de $f'(x)$.

x	0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$-3x+2$		$+$	0	$-$	
x	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-3x+2}{x}$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Donc la fonction f est strictement croissante sur $\left]0\,;\frac{2}{3}\right]$, et strictement décroissante sur $\left[\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$

Question 5

On considère l'équation : $3\ln(x) - \ln(x+30) = 2\ln(5)$,
où x appartient à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
On cherche, parmi les quatre propositions suivantes, la solution de cette équation.

a. 0 **b.** e^{-5} **c.** 10 **d.** 20

$3\ln(x) - \ln(x+30) = 2\ln(5) \iff \ln\left(x^3\right) - \ln(x+30) = \ln\left(5^2\right) \iff \ln\dfrac{x^3}{x+30} = \ln(25)$

$\iff \dfrac{x^3}{x+30} = 25$

Pour $x = 10$, $\dfrac{x^3}{x+30} = \dfrac{1\,000}{40} = 25$. **Réponse c.**

Question 6

Une société de peinture utilise, dans le cadre de son activité, une nacelle élévatrice (dite « nacelle à ciseaux »).
On note $h(t)$ la hauteur (en mètre) de la nacelle à l'instant t (en seconde) suivant la mise en route.
On suppose que h est la fonction de la variable réelle t définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ d'expression

$$h(t) = -15\,\mathrm{e}^{-0,2t} + 18.$$

a. La hauteur initiale de la nacelle est, en mètre : $h(0) = -15\,\mathrm{e}^{0} + 18 = -15 + 18 = 3$.

b. On sait que $\displaystyle\lim_{T \to -\infty} \mathrm{e}^{T} = 0$. Or $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} -0,2t = -\infty$. Donc $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0,2t} = 0$.
On en déduit que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} h(t) = 18$.
La nacelle ne peut donc pas dépasser la hauteur de 18 mètres.