Baccalauréat STI2D Épreuve d'enseignement de spécialité

Centres étrangers 13 mars 2023

Physique-Chimie et Mathématiques

EXERCICE 1 commun à tous les candidats (2 points)

La fonction θ, représentée ci-dessous, modélise l'évolution de la température du four (exprimée en degré Celsius) en fonction du temps t (exprimé en minute) écoulé depuis la fin de la pyrolyse. L'instant initial $t = 0$ correspond au début de la phase de refroidissement.

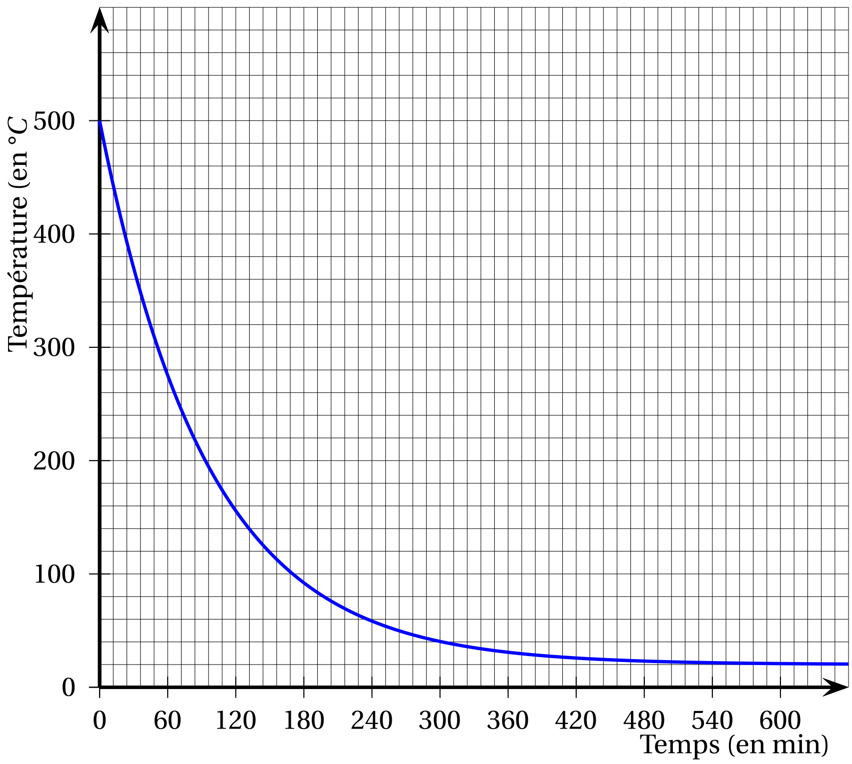

Figure 1 *: évolution de la température en fonction du temps lors de la phase de refroidissement*

1. Il semble que $\lim\limits_{t \to +\infty} \theta(t) = 20$
2. La température après 10 heures de refroidissement va se rapprocher de 20° C
   La fonction θ utilisée pour cette modélisation est définie sur $[\,0\,;+\infty[$ par :
   $$\theta(t) = 480\,\text{e}^{-\frac{1}{95}t} + 20.$$
3. $\theta(t) = 280 \iff 480\,\text{e}^{-\frac{1}{95}t} + 20 = 280 \iff 480\,\text{e}^{-\frac{1}{95}t} = 260 \iff \text{e}^{-\frac{1}{95}t} = \dfrac{260}{480} = \dfrac{26}{48} = \dfrac{13}{24}$.
   En utilisant la croissance de la fonction logarithme népérien, on a donc :
   $-\frac{1}{95}t = \ln\dfrac{13}{24} \iff t = \dfrac{\ln\dfrac{13}{24}}{-\frac{1}{95}} = -95\ln\dfrac{13}{24}$ (environ 58,24 min).
   Pour des raisons de sécurité, le fabricant impose que la porte du four reste verrouillée tant que la température du four est supérieure à 280° C.

4. On a $8,24 = 58 + 0,24 \times 60 \approx 58$ min 14 s.

Exercice 3 — 4 points

Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes.*

Question 1

Soit la fonction f définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

1. On a $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}$; or on sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{x}} = 0$.
2. La fonction f produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable en particulier sur $[0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle, en dérivant comme un produit :
   $f'(x) = 1\,\mathrm{e}^{-x} - 1 \times x\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(1-x)$.
3. On sait que quel que soit $x \in [0\,;\,+\infty[$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$: le signe de $f'(x)$ est donc celui de $1-x$:
   - $1 - x > 0 \iff 1 > x$: on a donc $f'(x) > 0$ sur $[0\,;\,1[$; la fonction est croissante sur $[0\,;\,1[$;
   - $1 - x < 0 \iff 1 < x$: on a donc $f'(x) < 0$ sur $[1\,;\,+\infty]$; la fonction est décroissante sur $[1\,;\,+\infty]$;
   - $1 - x = 0 \iff 1 = x$: on a donc $f'(1) = 0$; la fonction f a un maximum en 1 égal à $f(1) = 1\,\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0,368$.
   - D'autre part $f(0) = 0 \times \mathrm{e}^{0} = 0 \times 1 = 0$. D'où le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Question 2

On considère les nombres complexes $z_1 = 6\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$, où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. $z_2 = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$.
   Donc $|z_2|^2 = \left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 = 3 + 1 = 4 = 2^2$, donc $|z_2| = 2$.
   On peut en factorisant ce module 2 dans l'écriture de z_2, écrire :
   $z_2 = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right)$.
   Or $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{5\pi}{6}$ et $\dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{5\pi}{6}$, donc :
   $z_2 = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{6}\right) = 2\,\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{6}}$.

2. En se servant du résultat précédent :

$Z = \dfrac{z_1}{z_2^3} = \dfrac{6\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\left(2\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}\right)^3} = \dfrac{6}{8}\,\dfrac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{5\pi}{2}}}$.

Or $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{5\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, donc

$Z = \dfrac{3}{4}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{3}{4}\,\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.