Corrigé du baccalauréat STI2D

Épreuve d'enseignement de spécialité

Centres étrangers 4 mai 2022

Physique-Chimie et Mathématiques

EXERCICE 1 commun à tous les candidats (4 points) (physique-chimie et mathématiques)

Caractéristiques de l'Airbus A320

Équipage	
Équipage commercial	4 personnes
Équipage technique	2 personnes
Mécanicien navigant	–
Pilotes	2 personnes
Radio	–
Masse (kg)	
Masse à vide	42 600
Masse maximale à l'atterrissage	64 500
Masse maximale au décollage	73 500
Motorisation	
Moteurs	–
Poussée	9 980 kgp
Réacteurs	x2 CFM56-5A4

D'après https ://fr.wikipedia.org//Airbus_A320

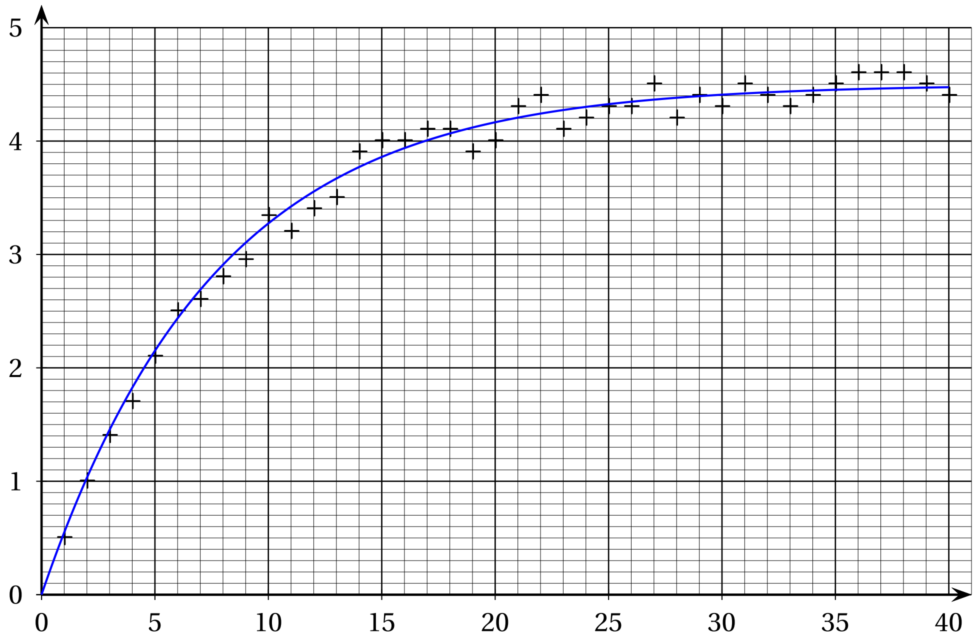
Toute l'étude est réalisée lors d'un taxiage avant un décollage sur sol horizontal en charge maximale.

L'avion, initialement à l'arrêt, démarre sur un sol horizontal et atteint une vitesse maximale v_{max}. On modélise la vitesse de l'avion, exprimée en m.s^{-1}, par une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(t) = A \times \left(1 - \mathrm{e}^{-0,13t}\right)$$

où A est une constante réelle et t est le temps exprimé en seconde.

1. On sait que $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0,13t} = 0$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = A$.



2. Le graphique donne $A \approx 4,5$.

$$v(t) = 4,5 \times \left(1 - \mathrm{e}^{-0,13t}\right)$$

3. On a pour $x \in [0\,;\,+\infty[$, $\quad v'(t) = 4,5 \times (-0,13)\,\mathrm{e}^{-0,13t} = 0,585\,\mathrm{e}^{-0,13t}$.

EXERCICE 3 (4 points)
(mathématiques)

Question 1.

$$g'(t) = 6\,\mathrm{e}^{-t}(1-t).$$

1. Comme $6 > 0$ et $\mathrm{e}^{-t} > 0$, quel que soit $t \in [0\,;\,+\infty[$, le signe de $g'(t)$ est celui de $1 - t$.
   - $1 - t > 0 \iff 1 > t \iff t < 1 : g'(t) > 0$ sur $[0\,;\,1]$;
   - $1 - t < 0 \iff 1 < t \iff t > 1 : g'(t) < 0$ sur $[1\,;\,+\infty]$;
   - $1 - t = 0 \iff 1 = t \iff t = 1 : g'(1) = 0$.
2. Des résultats précédents on déduit que :
   - g est croissante sur $[0\,;\,1]$;
   - g est décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$;
   - $g(1)$ est donc le maximum de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Question 2.

$$z_{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} \text{ et } z_{\mathrm{B}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}.$$

1. Pour z_{A} : puisque un argument est $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$: A appartient au deuxième quadrant, donc 2 et 4 sont possibles.
   Pour z_{B} : puisque un argument est $-\frac{2\pi}{3} = -\pi + \frac{\pi}{3}$ B appartient au troisième cadran : il ne reste que la figure 2.

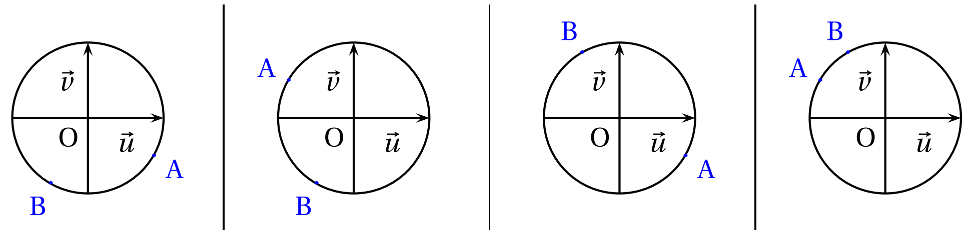


Figure 1 **Figure 2** **Figure 3** **Figure 4**

2. $\dfrac{z_{\text{A}}}{z_{\text{B}}} = \dfrac{\text{e}^{\,\text{i}\frac{5\pi}{6}}}{\text{e}^{-\text{i}\frac{2\pi}{3}}} = \text{e}^{\,\text{i}\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = \text{e}^{\,\text{i}\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{4\pi}{6}\right)} = \text{e}^{\,\text{i}\left(\frac{9\pi}{6}\right)} = \text{e}^{\,\text{i}\frac{3\pi}{2}} = \text{e}^{\,\text{i}\left(2\pi-\frac{\pi}{2}\right)} = \text{e}^{\,\text{i}\frac{-\pi}{2}}$.

Question 3.

Dans $]1\,;\,+\infty[$, $\ln(x-1)$, $\ln(x+1)$ et $\ln(x)$ sont définis et sur cet intervalle :

Tout d(abord $\ln\left(x^2-1\right) = \ln(0,5) = \ln\dfrac{x^2-1}{0,5} = \ln 2(\left(x^2-1\right)$.

On peut donc écrire :

$\ln(x-1)+\ln(x+1)-\ln(x) = \ln\left(x^2-1\right)-\ln(0,5) \iff \ln x(x-1)(x+1) = \ln 2\left(x^2-1\right)$ et par croissance de la fonction logarithme népérien :

$x\left(x^2-1\right) = 2\left(x^2-1\right) \iff x\left(x^2-1\right)-2\left(x^2-1\right) = 0 \iff \left(x^2-1\right)(x-2) = 0 \iff$
$(x+1)(x-1)(x-2) = 0$.

Il y a donc trois possibilités : $x=-1$, ou $x=1$ ou $x=2$, mais seul $2 \in]1\,;\,+\infty[$. Donc $S=\{2\}$.

Question 4.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = -y+2$.

1. • Les solutions de l'équation $y' = -y$ sont les fonctions définies par $t \longmapsto f(t) = K\text{e}^{-t}$, avec $K \in \mathbb{R}$;
   • Soit la solution constante $y = \alpha$ solution de $y' = -y+2$, donc $y' = 0 = -\alpha+2 \iff \alpha = 2$.
   Conclusion :toutes les solutions sont les fonctions définies par : $t \longmapsto f(t) = 2+K\text{e}^{-t}$, avec $K \in \mathbb{R}$
2. On a $f(0) = 0 \iff 2+K\text{e}^{-0} = 0 \iff 2+K = 0 \iff K = -2$.
   L a solution g telle que $g(0) = 0$ est donc définie par $g(t) = 2-2\text{e}^{-t}$.

Question 5.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2\,\text{e}^{\,x}$.

1. Pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $f(x) = x^2-2\,\text{e}^{\,x} = x^2\times\text{e}^{\,x}\times\text{e}^{-x}-2\,\text{e}^{\,x} = \text{e}^{\,x}\left(x^2\times\text{e}^{-x}-2\right)$.
2. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,\text{e}^{-x} = 0$ et aussi que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\,\text{e}^{-x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\,\text{e}^{-x}-2\right) = -2$ et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\text{e}^{\,x} = +\infty$, par produit de limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Question 6.

Rappel :

$$u(t) = \sqrt{3}\,\cos(t) - \sin(t)\,.$$

1. Par application de la première formule, on peut écrire :
$u(t) = \sqrt{3}\,\cos(t) - \sin(t) = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\cos(t) - \dfrac{1}{2}\sin(t)\right)$, soit puisque $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6}$,
$u(t) = 2\left(\cos t \cos\dfrac{\pi}{6} - \sin t \sin\dfrac{\pi}{6}\right)$, d'où par application de la troisième formule, on peut écrire :
$u(t) = 2\cos\left(t + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

2. $u(t) = 1 \iff 2\cos\left(t + \dfrac{\pi}{6}\right) = 1 \iff \cos\left(t + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2} \iff \cos\left(t + \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3} \iff$
d'où deux possibilités :
$\left\{\begin{array}{l} t + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ t + \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ t = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ t = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right.$
$S = \left\{\dfrac{\pi}{6}\ ;\ -\dfrac{\pi}{2}\right\}$ à $2k\pi$ près.

On pourra s'aider du demi-cercle trigonométrique ci-dessous :