Durée : 4 heures

∽ Corrigé du baccalauréat STI2D - Antilles–Guyane ∾
10 septembre 2019

Exercice 1 **4 points**

1. **a.** La première courbe ne convient pas car f n'est pas positive sur l'intervalle $]-1\ ;\ 1[$.
   b. La deuxième courbe ne convient pas car f n'est pas positive sur $]-\infty\ ;\ -1[$:
   c. Pour la troisième courbe tout convient les variations, le signe de la fonction et on a bien $f(2) = 0$.
   d. Pour la quatrième courbe il y a une incohérence : la fonction n'est pas définie en -1 et ensuite elle est définie en -1 : $f(-1) = -1$!
2. Les deux fonctions sont positives sur l'intervalle $[0 ; 1]$, donc on a :
   $\mathscr{A}(\mathscr{D}) = \displaystyle\int_0^1 (g(x) - f(x))\,\text{d}x = \int_0^1 \left(x^2 + x + 2 - 4x^3 -\right)\text{d}x = \left[\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + 2x - x^4\right]_0^1 =$
   $\dfrac{1^3}{3} + \dfrac{1^2}{2} + 2 \times 1 - 1^4 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} + 2 - 1 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{2+3+6}{6} = \dfrac{11}{6}$.
3. On lit sur le graphique $0{,}68 \approx P(\mu - \sigma\ ;\ \mu + \sigma)$.
   Donc $\mu = 5$ et $\sigma = 2$.
4. On a $p(X < 7) = \dfrac{7-3}{a-3} = 0{,}8 \iff \dfrac{4}{a-3} = 0{,}8 \iff 4 = 0{,}8(a-3) \iff 4 = 0{,}8a - 2{,}4 \iff$
   $0{,}8a = 6{,}4 \iff a = 8$.

Exercice 2 **5 points**

Partie A

Chaque jour il y a 1 000 naissances et 500 décès, donc chaque jour la colonie s'accroit de $1\,000 - 500 =$ 500 individus.
Le nombre d'individus est représenté par une suite arithmétique de premier terme $a_0 = 40\,000$ et de raison $r = 500$. Si n est le nombre de jours, il faut donc résoudre l'inéquation :
$40\,000 + 500n \geqslant 50\,000 \iff 500n \geqslant 10\,000 \iff n \geqslant 20$.
La population atteindra les 50 000 individus au bout de 20 jours.

Partie B

1. $$u_{n+1} = 0{,}8u_n + 500.$$
   On a donc $u_1 = 0{,}8 \times u_0 + 500 = 0{,}8 \times 40\,000 + 500 = 32\,000 + 500 = 32\,700$.
   Un jour après le début des pulvérisations, le nombre d'abeilles est égal à 32 700.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 2\,500$.
   a. On a $v_{n+1} = u_{n+1} - 2\,500 = 0{,}8u_n + 500 - 2\,500 = 0{,}8u_n - 2\,000$.
   Or $2\,000 = \dfrac{2\,000 \times 0{,}8}{0{,}8} = 0{,}8 \times \dfrac{2\,000}{0{,}8} = 0{,}8 \times 2\,500$.
   Donc $v_{n+1} = 0{,}8u_n - 0{,}8 \times 2\,500 = 0{,}8\,(u_n - 2\,500) = 0{,}8v_n$.
   Finalement : pour tout naturel n , $v_{n+1} = 0{,}8v_n$.

b. Le résultat précédent montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8 de premier terme $v_0 = u_0 - 2\,500 = 50\,000 - 2\,500 = 47\,500$.
On sait qu'alors pour tout naturel bn, $\quad v_n = v_0 \times 0{,}8^n = 47\,500 \times 0{,}8^n$.

c. $v_n = u_n - 2\,500 \iff u_n = v_n + 2\,500 = 47\,500 \times 0{,}8^n + 2\,500$

Il faut étudier l'inéquation $v_n < 5\,000$, soit

$47\,500 \times 0{,}8^n + 2\,500 < 5\,000 \iff 47\,500 \times 0{,}8^n < 2\,500 \iff 0{,}8^n < \dfrac{2\,500}{47\,500} \iff 0{,}8^n < \dfrac{25}{475} \iff$
$0{,}8^n < \dfrac{1}{19} \iff n\ln 0{,}8 < \ln\frac{1}{19} \iff n\ln 0{,}8 < -\ln 19 \iff n > -\dfrac{\ln 19}{\ln 0{,}8}$ (car $\ln 0{,}8 < 0$).

Or $-\dfrac{\ln 19}{\ln 0{,}8} \approx 13{,}2$.

Donc le nombre d'abeilles passera au dessous du seuil de 5 000 individus durant le 14^e^ jour.

Autre méthode

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0{,}8^n = 0$, car $0 < 0{,}8 < 1$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 47\,500 \times 0{,}8^n = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 2\,500 < 5\,000$.

Ceci montre qu'il existe un jour où la population passant sous les 5 000 la colonie d'abeilles sera en danger.

Partie C

On a $n \geqslant 30$, $np = 500 \times 0{,}2 = 100$ et $n \times (1-p) = 500 \times 0{,}8 = 400$; on peut donc calculer l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % qui est égal à :

$$\left[0{,}2 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}2\times 0{,}8}{500}}\ ;\ 1{,}96 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}2\times 0{,}8}{500}}\right] \approx [0{,}164\ ;\ 0{,}236].$$

Or sur l'échantillon la fréquence observée est égale à : $\dfrac{102}{500} = \dfrac{204}{1\,000} = 0{,}204$.

Comme $0{,}204 \in [0{,}164\ ;\ 0{,}236]$, on peut considérer que la proportion $p = 0{,}2$ est crédible.

Exercice 3 **7 points**

Dans cet exercice, on s'intéresse aux batteries des voitures électriques. La charge (énergie restituable) est exprimée en kilowattheure.
Conformément à l'usage commercial, on appelle capacité la charge complète d'une batterie.

Partie A

1. La puissance de charge « Rapide /fg est égale à $400 \times 63 = 25\,200$ W soit 25,2 kW.
Donc le temps de charge est égale à $\dfrac{60}{23{,}2} \approx 2{,}38$ h soit 2h et $0{,}38 \times 60 = 22{,}8$ min donc environ 2 h 23 min.

2.

$$y' + 0{,}55y = 12{,}1.$$

a. On sait que les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :
$f(t) = K\text{e}^{-0{,}55t} + \dfrac{12{,}1}{0{,}55} = K\text{e}^{-0{,}55t} + 22$ avec $K \in \mathbf{R}$.

b. Au temps $t = 0$, la batterie est déchargée donc $f(0) = 0$.

c. D'après la question précédente :
$f(0) = 0 \iff K\text{e}^{-0{,}55\times 0} + 22 = 0 \iff K + 22 = 0 \iff K = -22$.
Donc f est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(t) = -22\text{e}^{-0{,}55t} + 22$.

d. On a $f(t) = 11 \iff -22\mathrm{e}^{-0,55t} + 22 = 11 \iff 11 = 22\mathrm{e}^{-0,55t} \iff \dfrac{1}{2} = \mathrm{e}^{-0,55t} = \iff \ln\dfrac{1}{2} = -0,55t \iff -\ln 2 = -0,55t \iff$

$\ln 2 = 0,55t \iff t = \dfrac{\ln 2}{0,55} \approx 1,260.$

1,26 h = 1 h et $0,26 \times 60$ min soit 15,6 min.

Le temps de demi-charge est à peu près égal à 1 h 16 min.

e. Une batterie de marque A a une capacité de 22 kW. Elle sera à 80 % de sa capacité soit à $22 \times 0,80$ au bout d'un temps t tel que :

$22 - 22\mathrm{e}^{-0,55t} = 22 \times 0,8$, soit en simplifiant par 22 :

$1 - \mathrm{e}^{-0,55t} = 0,8 \iff \mathrm{e}^{-0,55t} = 0,2$, d'où par croissance de la fonction logarithme népérien :

$-0,55t = \ln 0,2 \iff t = \dfrac{\ln 0,2}{-0,55}$.

Or $\dfrac{\ln 0,2}{-0,55} \approx 2,92625$ soit 1 h et $0,92625 \times 60 \approx 55,56$

La batterie est à 80 % de sa charge à un peu moins de 3 h : le document 3 dit vrai.

Partie B

$$g(x) = -0,04x^3 + 7,2x^2 - 240x + 3\,000.$$

1. a. La fonction polynôme g est dérivable sur **R** et sur cet intervalle :

$g'(x) = -0,04 \times 3x^2 + 2 \times 7,2x - 240 = -0,12x^2 + 14,4x - 240.$

b. La dérivée de g est un trinôme du second degré : $\Delta = 14,4^2 - 4 \times (-0,12) \times (-240) = 207,36 - 115,2 = 92,16 > 0$, avec $92,16 = 9,6^2$.

Les racines du trinôme sont donc :

$x_1 = \dfrac{-14,4 + 9,6}{2 \times (-0,12)} = \dfrac{4,8}{0,24} = 20$ et $x_2 = \dfrac{-14,4 - 9,6}{2 \times (-0,12)} = \dfrac{24}{0,24} = 100.$

On sait que $g'(x) < 0$, sauf sur l'intervalle $[20 ; 100]$ où $g'(x) \geqslant 0$.

La fonction est donc décroissante sauf sur l'intervalle $[20 ; 100]$ où elle est croissante, d'où le tableau de variations suivant :

x	0		20		100		120
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	3 000	↘	760	↗	11 000	↘	8 760

c. La résistance maximale est $g(100) = 11\,000$, obtenue à 100°.

2. a. D'après le tableau de variations, on cherche sur l'intervalle $[20 ; 100]$. la calculatrice donne $g(50) = 4\,000$ et $g(60) = 5\,880$, donc la température appartient à $[50 ; 60]$, puis $g(55) = 4\,925$ et $g(56) = 5\,114,6$, donc la température appartient à $[55 ; 56]$.

Le message d'alerte apparaît sur l'ordinateur de bord du véhicule entre 55° et 56°.

b. On considère l'algorithme suivant :

```
x ← 20
y ← 760
Tant que y < 5000
    x ← x + 1
    y ← −0,04x^3 + 7,2x^2 − 240x + 3000
Fin Tant que
```

Exercice 4 **4 points**

1. **a.** On sait que $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc
$z_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \mathrm{i}$.

   b. • En remplaçant dans l'équation :
$(2+\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 1+3\mathrm{i} \iff 2+2\mathrm{i}+\mathrm{i}-1 = 1+3\mathrm{i}$ qui est vraie.
• En résolvant l'équation :
$(2+\mathrm{i})z = 1+3\mathrm{i} \iff z = \dfrac{1+3\mathrm{i}}{(2+\mathrm{i})} = \dfrac{(1+3\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})} = \dfrac{2+3+6\mathrm{i}-\mathrm{i}}{4+1} = \dfrac{5+5\mathrm{i}}{5} = 1+\mathrm{i}$

2. On calcule d'abord le module de z_2 :
$|z_2|^2 = 1+3 = 4 = 2^2$, donc $|z_2| = 2$.
On factorise ce module dans l'écriture de z_2 :
$z_2 = 2\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
On reconnait $-\dfrac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{2\pi}{3}$, donc
$z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

3. On a donc $z_3 = 4\mathrm{e}^{\frac{7\pi}{6}}$.
D'autre part $z_1^2 \times z_2 = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^2 \times 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times 2\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}} = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 4\mathrm{ei}\left(\frac{3\pi}{6} + \frac{4\pi}{6}\right) = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$.
On a donc $z_3 = z_1^2 \times z_2$.

4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
On considère les trois points A, B et C d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 1+\mathrm{i}$, $z_{\mathrm{B}} = -1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_{\mathrm{C}} = -2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$.

   a. Voir à la fin.

   b. On a $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\begin{pmatrix}-2\sqrt{3}\\ -2\end{pmatrix}$.
Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = -1 \times (-2\sqrt{3}) + \sqrt{3} \times (-2) = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0$; les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ sont orthogonaux, donc les droites (OB) et (OC) sont perpendiculaires, donc le triangle OBC est rectangle en O.

Annexe de l'exercice 4

À rendre avec la copie