Corrigé du baccalauréat STI2D Polynésie 11 juin 2015

Exercice 1

1. Soit M le point d'affixe z.
   $|z| = 1 \iff OM = 1$
   L'ensemble **E** cherché est donc le cercle de centre O et de rayon 1 : **réponse c.**
2. $z_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \quad z_2 = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$

   Ecrivons z_2 sous forme exponentielle.
   $|z_2| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$

   Soit $\theta = arg(z_2)$
   $\cos(\theta) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{1}{2}$ d'où $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$
   Ainsi on a $z_2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$
   D'où $z_1 z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \times 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{6}\right)} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{13\pi}{12}\right)}$

   réponse c.
3. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty$ **réponse b.**
4. Soit l'équation différentielle $y' + 2y = 5$.
   On sait que ses solutions sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, par une expression de la forme : $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{5}{2}$ $C \in \mathbb{R}$
   Parmi les quatre fonctions proposées, seule la **réponse a/** peut s'écrire sous cette forme, avec $C = -\dfrac{1}{2}$: en effet $\dfrac{5 - \mathrm{e}^{-2x}}{2} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$

Exercice 2

1. Chiffre d'affaires pour l'année 2015 : $920 + \dfrac{5}{100} \times 920 = 966$ millions d'euros.

2. Augmenter de 5% revient à multiplier par $1 + \dfrac{5}{100} = 1{,}05$
   On a donc, pour tout entier n : $C_{n+1} = 1{,}05 C_n$.
   La suite (C_n) est géométrique de raison $1{,}05$ et de premier terme $C_0 = 920$
3. Pour tout entier n : $C_n = C_0 \times 1{,}05^n = 920 \times 1{,}05^n$
4. (a) Chiffre d'affaires en 2019 : $C_5 = 920 \times 1{,}05^5 \approx 1174$ arrondi au million d'euros près.
   (b) $1{,}05^5 \approx 1{,}276$. Le pourcentage d'augmentation du chiffre d'affaires de 2014 à 2019 est donc de 27,6%, arrondi à 10^{-1}.
5. (a)

```
Variables
    N : un nombre entier naturel
    C : un nombre réel
Initialisation
    Affecter à N la valeur 0
    Affecter à C la valeur 920
Traitement
    Tant que C < 920 × 2
        Affecter à N la valeur N + 1
        Affecter à C la valeur C ∗ 1,05
    Fin Tant que
Sortie
    Afficher 2014 + N
```

   (b) En faisant tourner cet algorithme, on obtient l'affichage $N = 2029$
   C'est donc en 2029 que le chiffre d'affaires du fournisseur ENERGIA réalisé dans les services énergétiques dépassera les 1 840 millions d'euros.
   (c) Méthode plus directe : on résout l'inéquation $(I) : 1{,}05^n \geqslant 2$.
   $(I) \iff \ln(1{,}05^n) \geqslant \ln 2 \iff n \ln 1{,}05 \geqslant \ln 2 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}05}$
   Or $\dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}05} \approx 14{,}2$
   Donc c'est bien 15 ans après 2014, donc en 2029 que C_n aura doublé.
6. Pour une hausse annuelle de 10 % , on résout l'inéquation (I_2) : $1{,}10^n \geqslant 2$.

   $(I_2) \iff n \geqslant \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}10}$
   Or $\dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}05} \approx 7{,}3$
   Donc c'est à partir de $n = 8$ soit l'année 2022, que C_n aura doublé.

Exercice 3

A– Étude de la fonction représentée par la courbe $(\mathscr{C})$

1. $f(0) = 4$.

   Or $f(0) = 4 \iff k - 0{,}5\left(\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0\right) = 4 \iff k - 0.5 \times 2 = 4 \iff k = 5$
   Donc on a bien : $f(x) = 5 - 0{,}5\left(\mathrm{e}^{0{,}2x} + \mathrm{e}^{-0{,}2x}\right)$

2. $f(4) = f(-4) = 5 - 0,5\left(\mathrm{e}^{0,8} + \mathrm{e}^{-0,8}\right) \approx 3,7$ à 10^{-1} près.

Cette valeur correspond à la hauteur sous le pont en bordure de chaussée pour véhicules motorisés.

En tenant compte de la hauteur de sécurité de 50 cm, on en déduit que la hauteur maximale exprimée en mètre d'un véhicule motorisé pour qu'il puisse passer sous le pont est de $3,2$ mètres, à 10^{-1} près.

3. Pour tout réel x de $[-8 ; 8]$, on a :

$f'(x) = -0,5\left(0,2\mathrm{e}^{0,2x} - 0,2\mathrm{e}^{-0,2x}\right) = -0,1\mathrm{e}^{0,2x} + 0,1\mathrm{e}^{-0,2x}$

Or
$$\begin{aligned} 0,1\mathrm{e}^{-0,2x}\left(1-\mathrm{e}^{0,4x}\right) &= 0,1\mathrm{e}^{-0,2x} - 0,1\mathrm{e}^{-0,2x}\mathrm{e}^{0,4x}\\ &= 0,1\mathrm{e}^{-0,2x} - 0,1\mathrm{e}^{-0,2x+0,4x}\\ &= 0,1\mathrm{e}^{-0,2x} - 0,1\mathrm{e}^{0,2x}\\ &= f'(x)\end{aligned}$$

4. Pour tout réel x, le facteur $0,1\mathrm{e}^{-0,2x}$ est strictement positif.

Donc $f'(x)$ est du signe de $\left(1-\mathrm{e}^{0,4x}\right)$ sur $[-8 ; 8]$.

Or $1-\mathrm{e}^{0,4x} > 0 \iff \mathrm{e}^{0,4x} < 1 \iff 0,4x < \ln 1 \iff 0,4x < 0 \iff x < 0$

Tableau de variation de f sur $[-8 ; 8]$:

x	-8		0		8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(-8)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$f(8)$

B– Calculs d'aires

1. $$\begin{aligned} I &= \int_{-8}^{8}\left(\mathrm{e}^{0,2x} + \mathrm{e}^{-0,2x}\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{0,2}\mathrm{e}^{0,2x} + \frac{1}{-0,2}\mathrm{e}^{-0,2x}\right]_{-8}^{8}\\ &= \left(\frac{1}{0,2}\mathrm{e}^{1,6} - \frac{1}{0,2}\mathrm{e}^{-1,6}\right) - \left(\frac{1}{0,2}\mathrm{e}^{-1.6} - \frac{1}{0,2}\mathrm{e}^{1,6}\right)\\ &= \frac{1}{0,1}\left(\mathrm{e}^{1,6} - \mathrm{e}^{-1,6}\right)\end{aligned}$$

2. L'aire de la façade exprimée en m^2 vaut :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_{-8}^{8}(5 - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_{-8}^{8}\left(5 - \left(5 - 0,5\left(\mathrm{e}^{0,2x} + \mathrm{e}^{-0,2x}\right)\right)\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_{-8}^{8}\left(0,5\left(\mathrm{e}^{0,2x} + \mathrm{e}^{-0,2x}\right)\right)\mathrm{d}x\\ &= 0,5I = 0,5 \times \frac{1}{0,1}\left(\mathrm{e}^{1,6} - \mathrm{e}^{-1,6}\right) = 5\left(\mathrm{e}^{1,6} - \mathrm{e}^{-1,6}\right)\end{aligned}$$

3. $S = 2\times 5\left(\mathrm{e}^{1,6} - \mathrm{e}^{-1,6}\right) = 10\left(\mathrm{e}^{1,6} - \mathrm{e}^{-1,6}\right) \approx 47,51$ m^2 à 10^{-2} près.

4. Nombre de bidons nécessaires : $N = \dfrac{S}{3\times 5} \approx 3,2$ Donc 4 bidons seront nécessaires pour recouvrir les deux faces de cette construction.

EXERCICE 4

1. M suit la loi normale de moyenne $m = 1\,000$ et d'écart-type $\sigma = 7$.
   (a) La calculatrice donne $P(995 \leqslant X \leqslant 1005) \approx 0,523$ à 10^{-3} près

   (b) $P(\text{« paquet refusé »}) = P(X \leqslant 990) \approx 0,077$

2. (a) On a une répétition de 100 expériences aléatoires identiques et indépendantes (contrôle qualité d'un paquet) à deux issues possibles, succès ou échec, le succès consistant à prélever un paquet à rejeter, de probabilité $p = 0,08$. Donc la variable aléatoire X comptant le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathscr{B}(100 ; 0,08)$.

   (b) $P(X=3) = \dbinom{100}{3} \times 0,08^3 \times 0,92^{97} \approx 0,025$

   (c) $P(X \geqslant 5) = 1 - P(X < 5) \approx 0,910$

3. On suppose que la proportion p de paquets non conformes vaut $p = 0,08$

On détermine alors l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence de paquets à rejeter sur un échantillon de 100 paquets.

$$I = \left[0,08 - 1,96\sqrt{\frac{0,08(1-0,08)}{100}}\ ;\ 0,08 + 1,96\sqrt{\frac{0,08(1-0,08)}{100}}\right]$$

$I = [0,027 ; 0,133]$ bornes arrondies à 10^{-3} près

On calcule la proportion f de paquets refusés sur l'échantillon de 100 paquets prélevé dans le stock global : $f = \dfrac{10}{100} = 0,1$

Conclusion : $f \in I$ donc on peut considérer que l'échantillon est représentatif de l'usine.