Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat Polynésie 11 septembre 2014 STI2D–STL spécialité SPCL

EXERCICE 1 **4 points**

On considère les nombres complexes Z_1 et Z_2 :

$$Z_1 = \frac{3\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{4\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}.$$

1. Écrivons les nombres Z_1 et Z_2 sous forme algébrique et trigonométrique.

★Z_1 : $Z_1 = \dfrac{3\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}} = 3\sqrt{2} \times \dfrac{1}{1+\mathrm{i}} = 3\sqrt{2} \times \dfrac{1-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i}) = \boxed{\dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}$

$$\left|Z_1\right| = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{2}+\frac{9}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}{3} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{d'où } \theta = -\frac{\pi}{4} \qquad \boxed{Z_1 = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

★Z_2 : $Z_2 = \dfrac{4\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}} = \dfrac{4\mathrm{i}(1-\mathrm{i}\sqrt{3})}{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})(1-\mathrm{i}\sqrt{3})} = \mathrm{i}(1-\mathrm{i}\sqrt{3}) = \boxed{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$

$$\left|Z_2\right| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{d'où } \theta = \frac{\pi}{6} \qquad \boxed{Z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)}$$

2. Les points A_1 et A_2 d'affixes respectives Z_1 et Z_2 ont été placés dans le repère donné en annexe.

3. Calculons sous forme algébrique le produit $Z_1 \times Z_2$.

$$Z_1Z_2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right) = \frac{3\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{\frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2} + \mathrm{i}\left(\frac{3(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{2}\right)}$$

donnons sa forme trigonométrique $Z_1Z_2 = \rho\rho'\left(\cos(\theta+\theta') + \sin(\theta+\theta')\right)$

$\rho\rho' = 3 \times 2 \qquad \theta+\theta' = \dfrac{-\pi}{4} + \dfrac{\pi}{12} = -\dfrac{\pi}{12}$

$$\boxed{Z_1Z_2 = 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}$$

4. Déterminons les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

par conséquent $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{3(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2} = \boxed{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1}{6} \times \left(-\dfrac{3(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{2}\right) = \boxed{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

EXERCICE 2 **6 points**

Une entreprise informatique a réalisé en 2013 un bénéfice de 22 000 €. La direction de cette entreprise se fixe pour objectif une hausse annuelle de son bénéfice de 4,5 %.

Pour tout entier naturel n, on note b_n le bénéfice prévu pour l'année $2013 + n$, on a donc $b_0 = 22000$.

Partie A

1. Calculons les bénéfices b_1 et b_2 espérés pour 2014 et 2015.
À une hausse de 4,5 % correspond un coefficient multiplicateur de $1+\frac{4,5}{100}$ c'est-à-dire 1,045.

   $b_1 = 22\,000 \times 1,045 = 22\,990$.

   $b_2 = 22\,990 \times 1,045 = 24\,024,55$.

2. Le bénéfice de l'année $(n+1)$ est celui de l'année n multiplié par 1,045.
(b_n) est une suite géométrique puisque chaque élément sauf le premier, se déduit, du précédent en le multipliant par un même nombre. La raison de cette suite est 1,045 et le premier terme $b_0 = 22\,000$.

3. Exprimons alors b_n en fonction de n. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 \times (q)^n$. $\quad b_n = 22\,000 \times (1,045)^n$.

Partie B

On considère l'algorithme ci-dessous :

```
N prend la valeur 0
B prend la valeur 22 000
Tant que B ⩽ 40000
    N prend la valeur N + 1
    B prend la valeur 1,045 * B
Fin Tant que
A prend la valeur N + 2013
Afficher A
```

1. La variable N correspond au rang de l'année après 2013 et B correspond au bénéfice prévu cette année-ci.
2. En exécutant cet algorithme, le dernier résultat affiché est 2027.
3. Cette valeur correspond à la première année à partir de laquelle le bénéfice prévu sera supérieur à 40 000 €.
4. La direction souhaite savoir à partir de quelle année le bénéfice de l'entreprise sera supérieur à 40 000 €.

   a. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $22\,000 \times 1,045^x > 40\,000$.

   $$1,045^x > \frac{40\,000}{22\,000} \qquad x\ln 1,045 > \ln\left(\frac{20}{11}\right)$$
   $$1,045^x > \frac{40}{22} \qquad x > \frac{\ln \frac{20}{11}}{\ln 1,045}$$
   $$1,045^x > \frac{20}{11} \qquad x > 13,582$$

   L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle $[13,582\ ;\ +\infty[$.

   b. Le résultat de la question 2. de la partie B donne l'année à partir de laquelle le bénéfice prévu dépassera 40 000 € et l'ensemble des solutions de l'inéquation précédente donne les rangs pour lesquels le bénéfice dépasse 40 000 €.

EXERCICE 3 **6 points**

Lorsque l'on consomme de l'alcool, le taux d'alcool dans le sang varie en fonction du temps écoulé depuis l'absorption. Ce taux est appelé « alcoolémie » et est mesuré en grammes par litre (g/L).

Après l'absorption de trois verres d'alcool, l'alcoolémie d'une personne donnée, en fonction du temps (exprimé en heures), est modélisée par la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(t) = 2,5te^{-t}$.

Partie A

1. La valeur de l'alcoolémie de la personne considérée au bout de 2 heures est $f(2)$.
$f(2) = 2,5 \times 2 \times \mathrm{e}^{-2} = 5\mathrm{e}^{-2} \approx 0,677$.

2. Montrons que pour tout réel t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $f'(t) = 2,5(1-t)\mathrm{e}^{-t}$.
$f'(t) = 2{,}5\mathrm{e}^{-t} + 2{,}5t(-\mathrm{e}^{-t}) = 2{,}5\mathrm{e}^{-t}(1-t)$.
Nous avons bien obtenu le résultat attendu.
3. Vérifions que la fonction f est solution de l'équation différentielle :(E) : $y' + y = 2,5\mathrm{e}^{-t}$.
$2,5(1-t)\mathrm{e}^{-t} + 2,5t\mathrm{e}^{-t} = 2{,}5\mathrm{e}^{-t}((1-t)+t) = 2{,}5\mathrm{e}^{-t}$
f est une solution de (E).
4. En remarquant que pour tout réel t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ on a $f(t) = \dfrac{2,5t}{\mathrm{e}^t}$,
$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^t}{t} = +\infty$; il en résulte que $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t}{\mathrm{e}^t} = 0$.
L'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de l'infini.
5. Déterminons les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
Étudions le signe de $f'(t)$.
Pour tout t, nombre réel positif, $2{,}5\mathrm{e}^{-t} > 0$ par conséquent le signe de $f'(t)$ est celui de $1-t$.
Sur $\mathbb{R}$ $1-t > 0 \iff t < 1$. Il en résulte si $t \in [0\ ;\ 1[$ alors $f't) > 0$ et si $t \in]1\ ;\ +\infty[$ alors $f'(t) < 0$.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
La fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ 1[$ car $f'(t) > 0$ sur cet intervalle.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
La fonction f est strictement décroissante sur $]1\ ;\ +\infty[$ car $f'(t) < 0$ sur cet intervalle.
6. La fonction f admet un maximum en 1, valant $2{,}5\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}92$.
L'alcoolémie la plus élevée pour la personne considérée est 0,92 g/L.

Partie B

1. La courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ a été tracée.
2. En France, la législation autorise pour un conducteur une alcoolémie maximale de 0,5 g/L.
Sachant que la personne a absorbé trois verres d'alcool à 12 h, déterminons à partir de quelle heure, elle pourra reprendre la route pour effectuer sans s'arrêter un trajet d'une durée d'une heure. Lisons sur le graphique l'abscisse du point d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = 0{,}5$. Nous lisons environ 2 heures et trente-cinq minutes.
Elle pourra partir vers 14 heures trente-cinq minutes.

EXERCICE 4 **4 points**

Partie A Loi exponentielle et radioactivité

On modélise la durée de vie T (exprimée en jours) d'un élément radioactif par une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ. On rappelle que pour tout $t > 0$, $P(T \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.
Le Thorium 227 a une demi-vie de 18 jours, ce qui signifie que :

$$P(T \geqslant 18) = P(T \leqslant 18) = 0,5.$$

1. Montrons que pour tout $t > 0$, $P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
Une primitive de $x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$ est $x \mapsto -\mathrm{e}^{-\lambda x}$.
$\displaystyle\int_0^t \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^t = -\mathrm{e}^{-\lambda t} + 1$
Par conséquent, nous avons bien $t > 0$, $P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
2. Calculons la valeur du paramètre λ pour le Thorium 227.
En utilisant les données nous avons $P(T \leqslant 18) = 1 - \mathrm{e}^{-18\lambda} = 0{,}5$. Résolvons $1 - \mathrm{e}^{-18\lambda} = 0{,}5$

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-18\lambda} &= 1 - 0{,}5 \\ \mathrm{e}^{-18\lambda} &= 0{,}5 \\ \ln\left(\mathrm{e}^{-18\lambda}\right) &= \ln 0{,}5 \\ -18\lambda &= \ln 0{,}5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 18\lambda &= \ln 2 \\ \lambda &= \frac{\ln 2}{18} \\ \lambda &\approx 0{,}0385 \end{aligned}$$

3. On suppose que $\lambda = 0,04$.

La durée de vie moyenne d'un atome de Thorium 227 est $\dfrac{1}{\lambda}$.

$\dfrac{1}{0{,}04} = 25$

Partie B Loi normale et usinage

Une entreprise fabrique en grande quantité des pièces tubulaires destinées à l'industrie aérospatiale. Le diamètre (exprimé en centimètres) d'une de ces pièces est modélisé par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance 3,65 et d'écart type 0,004.

Les résultats seront donnés à 10^{-3} *près.*

1. Une pièce est décrétée conforme lorsque son diamètre en centimètres est compris entre 3,645 et 3,655.

Calculons la probabilité qu'une pièce tubulaire de la production soit décrétée conforme.

$P(3{,}645 \leqslant X \leqslant 3{,}655) \approx 0{,}701$

2. Dans le cadre d'un fonctionnement correct de la chaîne de production, on admet que la proportion p de pièces conformes est 79 %. On rappelle que l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence de pièces conformes sur un échantillon de taille n est

$$I = \left[p - 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right].$$

Déterminons l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % lorsque p=0,79 et n=100

$$I = \left[0{,}79 - 1,96\sqrt{\dfrac{0{,}79(1-0{,}79)}{100}}\ ;\ 0{,}79 + 1,96\sqrt{\dfrac{0{,}79(1-0{,}79)}{100}}\right] \approx [0{,}710\ ;\ 0{,}870]$$

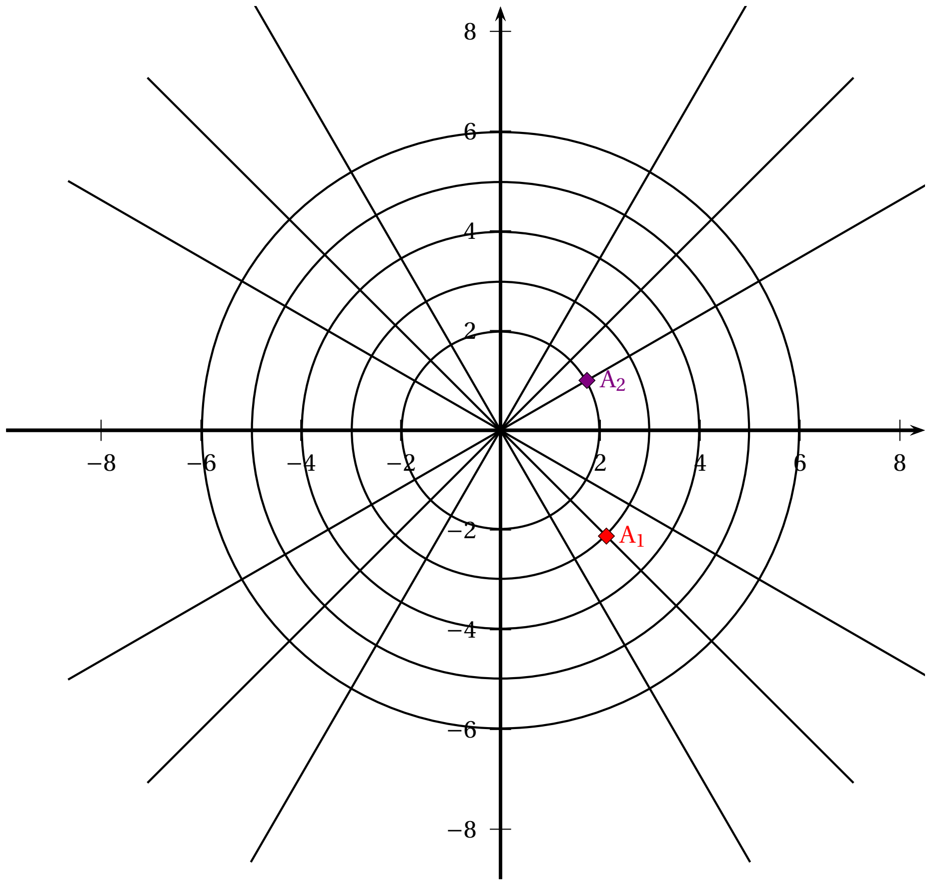
On contrôle régulièrement la chaîne de production en prélevant des échantillons de 100 pièces.

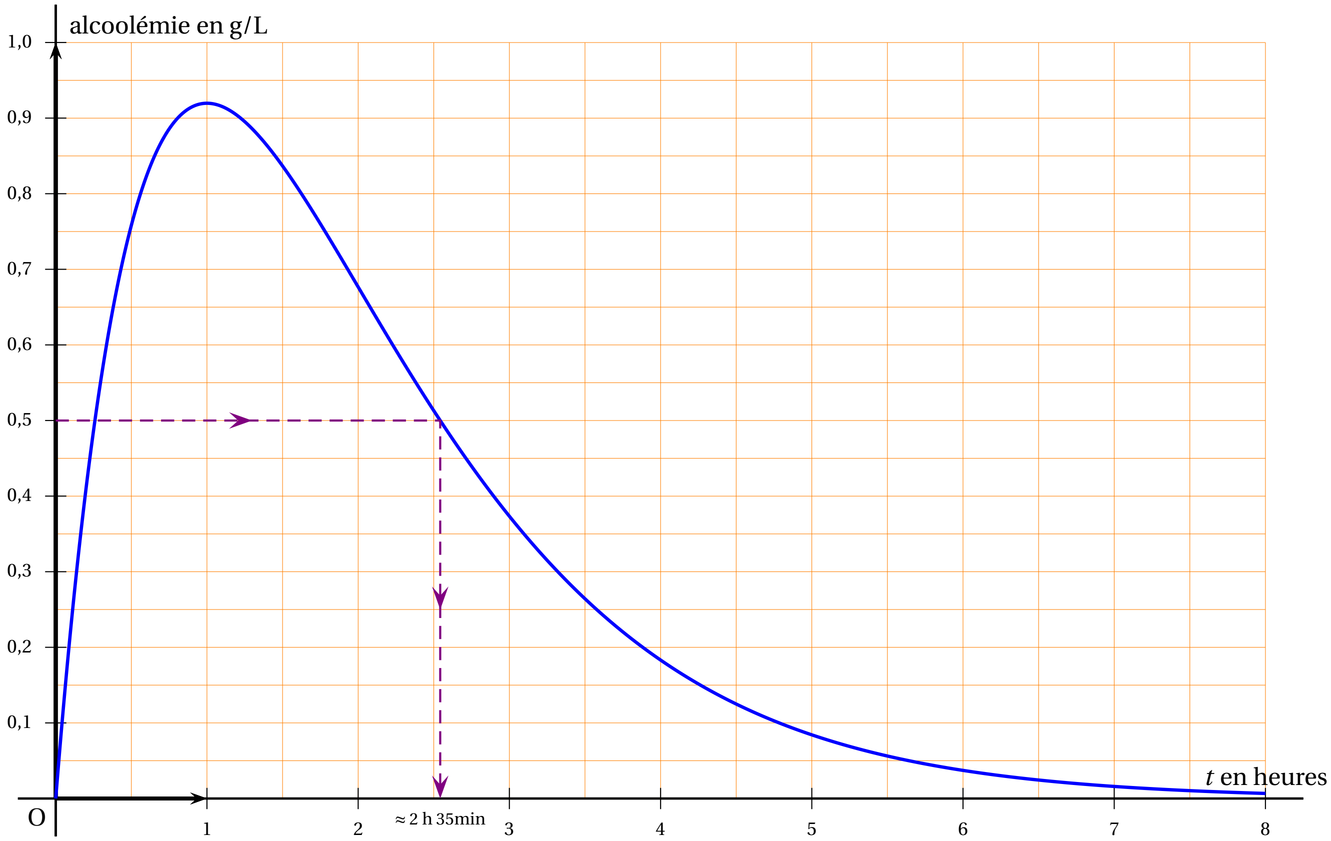
Lors d'un contrôle, on trouve 25 pièces défectueuses. Le responsable qualité doit-il prendre la décision d'effectuer des réglages sur la chaîne de production ?

La proportion de pièces défectueuses est $\frac{25}{100}$ par conséquent celle de pièces conformes est de 0,75. Cette proportion appartenant à I, il n'y a pas nécessité d'effectuer des réglages.

ANNEXE à rendre avec la copie

Exercice 1




alcoolémie en g/L
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
O
1
2
≈ 2 h 35min
3
4
5
6
7
8
t en heures