∽ Corrigé du baccalauréat STI Arts appliqués juin 2008 ∾
Antilles–Guyane

EXERCICE 1 **8 points**

1. $2\ln x = 3 \iff \ln x = \dfrac{3}{2} \iff x = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$. Réponse **b.**

2. Il y a $6 \times 6 = 36$ issues possibles et quatre favorables $(1\,;4)$, $(2\ ;3)$, $(3\,;\ 2)$ et $(4\,;1)$; la probabilité est donc égale à $\dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$. Réponse **b.**

3. On a $g(2) = 2 \times 8 - 6 \times 2 + 1 = 5$.
$g'(x) = 6x^2 - 6$, d'où $g'(2) = 24 - 6 = 18$.

   $M(x\ ;\ y) \in (T) \iff y - g(2) = g'(2)(x-2) \iff y - 5 = 18(x-2) \iff y = 18x - 31$. Réponse **c.**

4. $\mathrm{e}^x \geqslant 2 \iff \mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^{\ln 2} \iff x > \ln 2$. Réponse **c.**

5. Avec des notations évidentes : $p(E \cup N) = p(E) + p(N) - p(E \cap N) = \dfrac{12}{24} + \dfrac{9}{24} - \dfrac{5}{24} = \dfrac{16}{24}\dfrac{2}{3}$. Réponse **d.**

6. **Affirmation 1 :**
On sait que cet ensemble est une ellipse. Réponse **b.**

   Affirmation 2 :
   Seule le point $M(5\ ;\ 0)$ est un point de l'axe FF$'$ qui appartient à $\mathscr{C}$, car $8 + 2 = 10$

   Affirmation 3 :
   Réponse **c.**

EXERCICE 2 **12 points**

Partie A :

1. **a.** On a $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln(x+1) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.
On peut donc dire que la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est asymptote verticale à $\mathscr{C}$ au voisinage de zéro.

   b. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x+1) = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. Comme $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x+1+x}{x(x+1)} = \dfrac{2x+1}{x(x+1)}$.

3. **a.** On sait que $x > 0$, donc $x + 1 > 0$; le signe de $f'(x)$ est donc le signe du numérateur $2x+1$ qui est positif pour $x > -\dfrac{1}{2}$ donc pour tout x. La fonction est donc croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   b. On en déduit le tableau de variations de f suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4.

x	0,1	0,3	0,5	1	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	$-2,2$	$-0,9$	$-0,3$	0,7	1,8	3	3,7	4,3	4,7	5

5. Voir plus bas.

Partie B

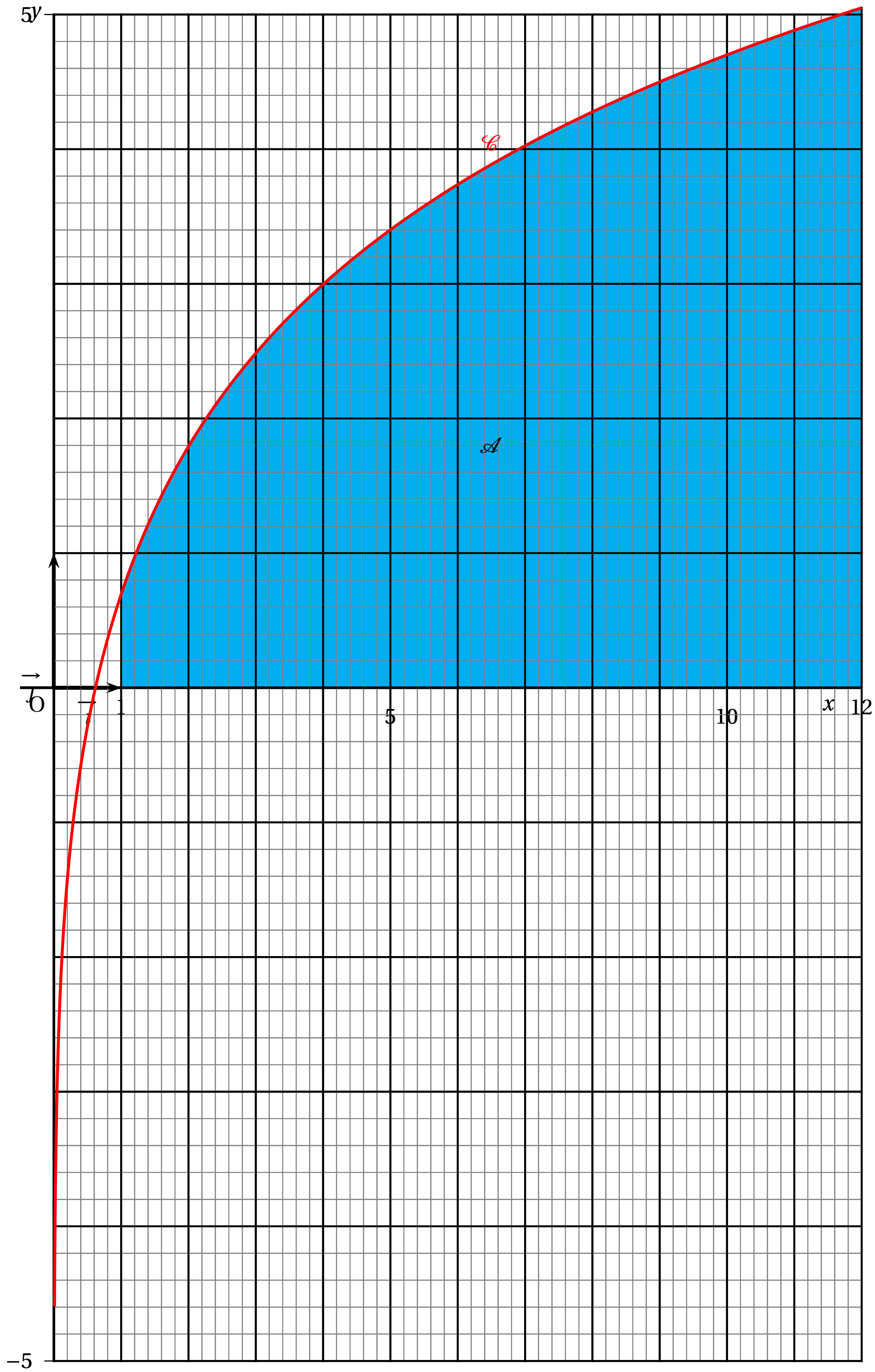
1. a. On sait que pour $a > 0,\ b > 0,\ \ln(a \times b) = \ln a + \ln b$, donc :
$f(x) = \ln[x(x+1)]$.
Donc $f(x) = 0 \iff \ln[x(x+1)] = 0 \iff \ln[x(x+1)] = \ln 1 \iff$
(d'après la croissance de la fonction logarithme népérien) $x(x+1) = 1 \iff$
$x^2 + x - 1 = 0$.
$\Delta = 1 + 4 = 5$: l'équation a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
Comme $x_2 < 0$, il n'y a qu'une solution dans $]0\ ;\ +\infty[$, $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,6$.

b. Géométriquement : le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses est approximativement le point de coordonnées (0,6 ; 0).

c. La fonction est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$ et $f(1) = \ln 2 \approx 0,69 > 0$: donc sur $[1\ ;\ +\infty[$, $f(x) > 0$.

2. a. F est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, et $F'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} + \ln(x+1) + (x+1) \times \dfrac{1}{x+1} - 2 = \ln x + \ln(x+1) + 2 - 2 = \ln x + \ln(x+1) = f(x)$.
F est donc une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

b. On a vu que sur $[1\ ;\ 12]$, $f(x) > 0$, donc en unités d'aire :
$\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^{12} f(x)\,\mathrm{d}x = []_1^{12} = F(12) - F(1) = 12\ln 12 + 13\ln 13 - 24 - [-2] =$
$\mathscr{A} = 12\ln 12 + 13\ln 13 - 22$.
L'unité d'aire valant $1 \times 2 = 2\text{cm}^2$, on a
$\mathscr{A} = 2(12\ln 12 + 13\ln 13 - 22) \approx 41,16 \approx 41\text{cm}^2$.


5
y
$\mathscr{C}$
$\mathscr{A}$
$\vec{\jmath}$
O
$\vec{\imath}$
1
5
10
x
12
−5