**Durée : 4 heures**

# Corrigé du baccalauréat STI mars 2010 Nouvelle-Calédonie
# Génie mécanique - Génie énergétique - Génie civil

**Exercice 1** **5 points**

**1.** Par somme des deux équations, on obtient $2z_1 = 2+2\text{i}\sqrt{3} \iff z_1 = 1+\text{i}\sqrt{3}$.
De même par différence :
$2\text{i}z_2 = 2+2\text{i} \iff \text{i}z_2 = 1+\text{i} \iff z_2 = 1-\text{i}$.

**2. a.** $c = ab = \left(1+\text{i}\sqrt{3}\right)(1-\text{i}) = 1+\sqrt{3}+\text{i}\left(\sqrt{3}-1\right)$.

**b.** On a $|a|^2 = 1+3 = 4 = 2^2 \Rightarrow |a| = 2$;
On peut donc écrire $a = 2\left(\dfrac{1}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+\text{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.
Un argument de $a$ est donc $\dfrac{\pi}{3}$.
$|b|^2 = 1+1 = 2 \Rightarrow |b| = \sqrt{2}$.
Donc $b = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{-\pi}{4}+\text{i}\sin\dfrac{-\pi}{4}\right)$.
Un argument de $b$ est donc $\dfrac{-\pi}{4}$
$|c| = |ab| = |a|\times|b| = 2\times\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.
L'égalité $a = bc$ implique que $\arg(c) = \arg(a)+\arg(b) = \dfrac{\pi}{3}+\dfrac{-\pi}{4} = \dfrac{4\pi-3\pi}{3\times4} = \dfrac{\pi}{12}$.

**c.** Voir plus bas.

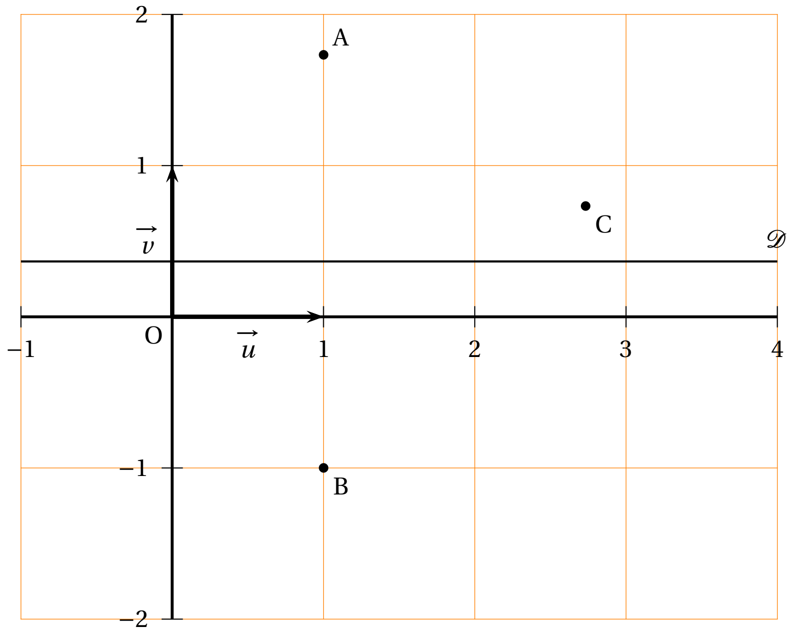
**3.** On a vu que $c = 1+\sqrt{3}+\text{i}\left(\sqrt{3}-1\right)$ et que son module est égal à $2\sqrt{2}$.
On peut donc écrire :
$c = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)$.
On a vu d'autre part qu'un argument de $c$ est $\dfrac{\pi}{12}$.
Donc par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}\ ;\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}.$$

**4. a.** $\left|z-(1+\text{i}\sqrt{3})\right| = \text{A}M$ ; $|z-(1-\text{i})| = \text{B}M$

**b.** D'après la question précédente :
$\left|z-(1+\text{i}\sqrt{3})\right| = |z-(1-\text{i})| \iff \text{A}M = \text{B}M$.
L'ensemble des points $M$ est l'ensemble des points du plan équidistants de A et de B : ce sont les points de la médiatrice de [AB].

**c.**




**EXERCICE 2** **4 points**

**1.** L'équation $4r^2+9=0$ a pour solutions $\dfrac{3}{2}\text{i}$ et $-\dfrac{3}{2}\text{i}$.
Les solutions de l'équation différentielle $(E)$ sont donc de la forme :

$$y = A\cos\frac{3}{2}t + B\sin\frac{3}{2}t.$$

**2.** Avec $f(t) = A\cos\dfrac{3}{2}t + B\sin\dfrac{3}{2}t$, on déduit que $f'(t) = -\dfrac{3}{2}A\sin\dfrac{3}{2}t + \dfrac{3}{2}B\cos\dfrac{3}{2}t$.
Donc :
$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 1 \\ f'(2\pi) & = & \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} A & = & 1 \\ \dfrac{3}{2} & = & -\dfrac{3}{2}B \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} A & = & 1 \\ B & = & -1 \end{array}\right.$$
Donc $f(t) = \cos\dfrac{3}{2}t - \sin\dfrac{3}{2}t$.

**3.** On peut écrire en factorisant $\sqrt{2}$ :
$f(t) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\dfrac{3}{2}t - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\dfrac{3}{2}t\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\dfrac{3}{2}t - \sin\frac{\pi}{4}\sin\dfrac{3}{2}t\right) = \sqrt{2}\left(\dfrac{3}{2}t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ (en utilisant l'identité $\cos a\cos b - \sin a\sin b = \cos(a+b)$).

**4.** La valeur moyenne de la fonction $f$ sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{2\pi}{3}\right]$ est égale à :

$$V_m = \frac{1}{\frac{2\pi}{3}-0}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{2}\left(\frac{3}{2}t+\frac{\pi}{4}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2\pi}\times\sqrt{2}\times\left(\frac{-2}{3}\right)\left[\sin\left(\frac{3}{2}t+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{2\pi}{3}} =$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sin\left(\frac{3}{2}\times\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{\pi}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{\pi}.$$

**PROBLÈME** **11 points**

**Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire**

1. $g$ somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$g'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + 2$.
2. $g'(x) > 0 \iff -\mathrm{e}^{-x} + 2 > 0 \iff 2 > \mathrm{e}^{-x} \iff \ln 2 > -x$ (par croissance de la fonction ln) $\iff x > -\ln 2$.
De même on obtient $g'(x) < 0 \iff x < -\ln 2$.
3. On a donc :
   - si $x < -\ln 2$, $g$ est décroissante ;
   - si $x > -\ln 2$, $g$ est croissante ;
   - si $x = -\ln 2$, $g$ a un extremum qui est un minimum : $g(-\ln 2) = \mathrm{e}^{\ln 2} + 2 \times (-\ln 2) + 1 = 2 - 2\ln 2 + 1 = 3 - 2\ln 2$
4. Comme le minimum $g(-\ln 2) = 3 - 2\ln 2 \approx 1,6 > 0$ il en résulte que $g$ est positive sur $\mathbb{R}$.

**Partie B : Étude de la fonction *f***

1. Étude des limites de $f$
   **a.** On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.
   Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
   **b.** On peut écrire :
   $f(x) = x^2 \times \dfrac{1}{x^2}\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) + x^2 \times 1 + x^2 \times \dfrac{1}{x} = x^2\left(\dfrac{-\mathrm{e}^{-x}}{(-x)^2} + 1 + \dfrac{1}{x}\right)$.
2. **a.** $f$ somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
   $f'(x) = -\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) + 2x + 1 = \mathrm{e}^{-x} + 2x + 1 = g(x)$.
   **b.** On a vu que sur $\mathbb{R}$, $g(x) > 0$, donc $f'(x) > 0$ : la fonction $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
   En utilisant l'écriture trouvée au 1. b. on a $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(-x)^2} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-\mathrm{e}^{-x}}{(-x)^2} = -\infty$ et comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |

3. On a $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = -\mathrm{e}^{-1} + 1^2 + 1 = 2 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} > 0$.
La fonction $f$ étant croissante sur l'intervalle $[1\ ;\ 2]$, il existe donc un unique réel $\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$ tel que $f(\alpha) = 0$. La calculatrice livre :
$f(0,4) \approx -0,11$ ; $f(0,5) \approx 0,14$ donc $0,4 < \alpha < 0,5$.
$f(0,44) \approx -0,01$ ; $f(0,45) \approx 0,01$ donc $0,44 < \alpha < 0,45$.
4. **a.** Soit $d$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $d(x) = f(x) - p(x) = -\mathrm{e}^{-x}$
   On sait que pour tout réel $x$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc $-\mathrm{e}^{-x} < 0$.
   Quel que soit le réel $x \in \mathbb{R}$, $d(x) < 0$ : géométriquement ceci signifie que la courbe $\mathscr{C}$ est sous la courbe $\mathscr{P}$.

**b.** On a vu que $f(x) - p(x) = -\mathrm{e}^{-x}$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}[f(x) - p(x)] = \lim_{x\to+\infty} -\mathrm{e}^{-x} = 0$.

Au voisinage de plus l'infini la courbe $\mathscr{P}$ est « tangente » à la courbe $\mathscr{C}$.

**5.** Voir plus bas.

**Partie C : Calcul d'une aire**

**1.** On a $\mathscr{A}(\beta) = \displaystyle\int_1^\beta [p(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_1^\beta \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_1^\beta = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-\beta}$ (u. a.)

**2.** On a $\displaystyle\lim_{\beta\to+\infty} \mathrm{e}^{-\beta} = 0$, donc

$$\lim_{\beta\to+\infty} \mathscr{A}(\beta) = \mathrm{e}^{-1}.$$

**Feuille annexe à compléter et à rendre avec la copie**